Milton Luís Monteiro Lopes

Licenciado em Matemática Aplicada

Relatório de Estágio

A Flexibilidade Procedimental em Matemática:

Um estudo com alunos do 9.º ano do ensino básico

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientadora: Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha, Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa

Coorientadora: Licenciada Maria do Rosário Dias Gaiteiro Lopes, Professora do Agrupamento de Escolas António Gedeão

Composição do Júri:

Presidente: Professora Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos

Arguente: Professor Doutor António Manuel Dias Domingos

Vogais: Professora Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha
Professora Maria do Rosário Dias Gaiteiro Lopes

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Setembro de 2019

Milton Luís Monteiro Lopes

Licenciado em Matemática Aplicada

Relatório de Estágio

A Flexibilidade Procedimental em Matemática:

Um estudo com alunos do 9.º ano do ensino básico

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientadora: Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha, Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa

Coorientadora: Licenciada Maria do Rosário Dias Gaiteiro Lopes, Professora do Agrupamento de Escolas António Gedeão

Composição do Júri:

Presidente: Professora Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos

Arguente: Professor Doutor António Manuel Dias Domingos

Vogais: Professora Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha
Professora Maria do Rosário Dias Gaiteiro Lopes

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Setembro de 2019

A Flexibilidade Procedimental em Matemática:

Um estudo com alunos do 9.º ano do ensino básico

Aos meus pais e à minha avó

Agradecimentos

Para concluir este ciclo de dois anos, que mais pareceu uma montanha-russa, com momentos altos e baixos, problemas financeiros, psicológicos, vontade de desistir, gostaria de agradecer, de forma especial, a todos os que estiveram presentes neste momento e que são os responsáveis por conseguir terminar esta etapa:

À professora Helena Rocha que me orientou no trabalho de investigação, por todas as suas sugestões, disponibilidade, motivação e todos os ensinamentos ao longo do mestrado.

À professora Helena Santos, responsável da unidade curricular Estágio Pedagógico, pela partilha de experiências e análise crítica que muito contribuiu para a melhoria da minha prática docente.

À orientadora de estágio Professora Rosário Lopes que foi incansável ao longo de todo este meu percurso, pela motivação, pelos ensinamentos nas aulas de estágio e toda a disponibilidade.

À professora Helena Fortio, diretora da turma de estágio, que me deu a conhecer o trabalho de um diretor de turma e que demonstrou o gosto por essa função.

Aos meus colegas de Mestrado, Frederico, Inês, Rita e Carina pelo companheirismo, troca de experiências. Foi um privilégio fazer parte deste grupo.

Aos alunos das turmas dos 9.º, 10.º e 12.º anos que acompanhei durante o estágio, pela relação estabelecida e pelo interesse que demonstraram durante as aulas que lecionei. Um agradecimento especial aos alunos do 9.º ano que participaram no meu trabalho de investigação.

À Maria de Lurdes Gonçalves, presidente da START.SOCIAL, pelo apoio financeiro que me incentivou a inscrever no mestrado.

À Irmã Maria de Jesus Basílio da Congregação das Servas de Nossa Senhora de Fátima, não tenho palavras para descrever o apoio que me deu, quer em termos motivacionais e financeiros. Muito obrigado pela sua generosidade, solidariedade e capacidade de ajudar o próximo.

À Catarina Lima, que me apoiou de forma incansável durante o mestrado, obrigado pela sua disponibilidade e pelos incentivos.

Ao meu pai e à minha madrasta, por me demonstrarem a importância dos estudos.

À minha mãe, razão da minha existência, e aos meus irmãos por estarem sempre presentes.

À minha avó que sempre acompanhou todos os passos desta etapa. Um pedido de desculpas pelas ausências e pelas recusas quando precisou de mim.

A todos os professores que contribuíram para a minha formação académica desde o 1.º ciclo do ensino básico até ao ensino superior.

Estas pessoas inspiram-me a acreditar no provérbio africano que diz: “Se queres ir depressa, vai sozinho; se quiseres ir longe, vai acompanhado”. Cheguei aqui acompanhado por estas pessoas e tantas outras pessoas que certamente não nomeei e, é assim que pretendo continuar toda minha caminhada, sempre acompanhado por pessoas que me inspiram a ser melhor.

Resumo

A presente dissertação, desenvolvida no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, visa abordar a atividade de estágio que decorreu numa escola secundária com 3.º ciclo do ensino básico, no ano letivo 2018-2019, bem como o projeto de investigação na prática pedagógica.

Na primeira parte da dissertação é apresentado o relatório de estágio que integra, por um lado, a caracterização do agrupamento de escolas no qual o estágio foi desenvolvido e, por outro lado, uma descrição e análise do trabalho pedagógico decorrido ao longo do ano letivo, nomeadamente, a observação, planificação e lecionação de aulas, a dinamização de atividades não letivas e a participação em reuniões.

No que respeita à segunda parte da dissertação, esta compreende o trabalho de investigação na prática pedagógica, tendo como principal objetivo analisar se os alunos do 9.º ano conseguem explorar diversos processos de resolução de uma tarefa de forma assertiva e flexível e identificar os principais fatores que interferem com esse processo. Pretende-se assim responder às seguintes questões de investigação:

1. Que fatores influenciam o processo de resolução dos alunos?
2. Que escolhas os alunos fazem quando adotam um determinado procedimento na resolução de uma tarefa e como justificam essas escolhas?
3. Que dificuldades os alunos revelam na exploração de diversos processos de resolução?
4. Quais os critérios em que se baseiam para escolher entre dois processos de resolução possíveis?

Para a realização do estudo foi adotada uma metodologia de investigação qualitativa, baseada em três estudos de caso. Os principais instrumentos de recolha de dados foram a observação participante, a entrevista e a análise documental.

As conclusões alcançadas sugerem que fatores como falta de domínio dos conteúdos e de alguns pré-requisitos, a leitura e compreensão do enunciado, a apresentação de informação junto da figura do enunciado ou noutro local e o excesso de informação no enunciado influenciam o processo de resolução dos alunos. Familiaridade, compreensão, confiança e eficiência foram as justificações dadas pelos alunos para a escolha da primeira estratégia implementada. A análise dos dados evidenciou ainda que os participantes no estudo revelam pouca capacidade na aplicação de procedimentos de forma precisa e flexível. As principais dificuldades manifestadas na exploração de diversos processos de resolução prendem-se com a falta de conhecimento dos conteúdos, o foco numa estratégia familiar ou a mais óbvia, a capacidade no estabelecimento de conexões entre vários conteúdos e a capacidade de visualização. Os resultados também sugerem que o conhecimento de uma única estratégia por parte dos alunos contribui de forma negativa para o desenvolvimento da flexibilidade procedimental dos mesmos. O estudo fornece evidências de que o critério dos alunos para a escolha entre dois processos de resolução possíveis assentam essencialmente na eficiência dos processos, no que é mais fácil memorizar, no que entendem melhor e no que sempre fazem nas aulas de Matemática, revelando em alguns casos que nem sempre escolhem a melhor estratégia para uma determinada tarefa.

Palavras-chave: estágio pedagógico; conhecimento conceptual; conhecimento procedimental; raciocínio; estratégias.

Abstract

This dissertation was developed in the scope of the master in Mathematics Education and focuses the internship activity that took place in a secondary school along the academic year 2018-2019, as well as the research project.

The dissertation is organized in two parts. The first one considers the internship report. It includes the characterization of the school context and learning environment where the internship took place, a description and analysis of the pedagogical work carried out along the school year, namely, the observation, planning and teaching of classes, the promotion of non-teaching activities and participation in meetings and group discussions. The second part focus in the research project. The goal is to analyse how 9th grade students are able to approach tasks in a diversified way and to identify the main factors that interfere with this process. The research aimed at answering the following research questions:

1. What factors influence the students' approach to the tasks?
2. What choices do students make when adopting a particular approach to solve a task and how do they justify these choices?
3. What difficulties do students experience in exploring different approaches to the tasks?
4. What criteria do students apply to decide on two possible approaches to the tasks?

A qualitative research methodology was adopted, based on three case studies. The data collection was based on participant observation, interview and document analysis.

The research suggests that students' approach to the tasks is influenced by factors such as lack of mastery on the mathematical content and inadequate basic prerequisites, difficulty to read and understand the task proposed, presentation of information at the figure or elsewhere and too much information on the task influence the students' resolution process. Familiarity, understanding, confidence and efficiency were the reasons given by students for choosing the first strategy implemented. Data analysis also highlighted that the study participants show little ability to apply mathematical procedures accurately and in a flexible way. The lack of knowledge on the content, a focus on a familiar or most obvious strategy, the ability to establish connections between various content and the viewing capacity are the main difficulties faced by the students when exploring different approaches to the tasks. The results also suggest that students' knowledge of a single strategy contributes negatively to the development of their procedural flexibility. The research provides evidence that students' criteria for choosing between two possible approaches to a task are essentially based on the efficiency of processes, on what is easier to memorize, on a better understanding of the approach and on what they usually do in mathematics classes. Moreover, it was also found that in some cases the students do not choose the best approach for a given task.

Keywords: pedagogical internship; conceptual knowledge; procedural knowledge; reasoning; approaching strategies.

Índice Geral

Índice de figuras

Parte I – Relatório de Estágio

Parte II – Projeto de Investigação

Índice de tabelas

Parte I – Relatório de Estágio

Parte II – Projeto de Investigação

Abreviaturas

Parte I – Relatório de Estágio

AEAG – Agrupamento de Escolas António Gedeão

EPE – Educação Pré-Escolar

EPIS – Empresário Pela Inclusão Social

ESAG – Escola Secundária António Gedeão

OC – Oferta Complementar

PCA – Percurso Curricular Alternativo

Parte II – Projeto de Investigação

TMR – Tarefas com Múltiplas Resoluções

NCTM – National Council Of Teachers Of Mathematics

NRC – National Research Council

RC – Raciocínio Criativo

RM – Raciocínio Memorizado

RA – Raciocínio Algorítmico

Parte I - Relatório de estágio

1. Introdução

O presente relatório final de estágio foi realizado no âmbito da unidade curricular Estágio Pedagógico, integrada no segundo ano do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário da Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa.

O relatório tem como principal objetivo descrever e analisar a atividade do professor Estagiário, desenvolvida ao longo do estágio pedagógico que decorreu no ano letivo 2018/2019 na Escola Secundária com o 3.º ciclo do Ensino Básico de António Gedeão, escola sede do Agrupamento de Escolas António Gedeão, situada no concelho de Almada.

O trabalho de estágio desenvolveu-se nas turmas dos 9.º, 10.º e 12.º anos de escolaridade, na disciplina de Matemática, sob a orientação da Professora Rosário Lopes e a supervisão da responsável pela unidade curricular Estágio Pedagógico, Professora Doutora Maria Helena Santos.

No presente relatório é feita uma contextualização e a respetiva caracterização do Agrupamento de Escolas António Gedeão, a caracterização da Escola Secundária António Gedeão onde decorreu a atividade de estágio, bem como a caracterização pormenorizada da turma do 9.º ano que foi acompanhada de forma integral no âmbito do estágio. No relatório consta também a descrição de forma pormenorizada do trabalho desenvolvido no âmbito da prática pedagógica supervisionada, nomeadamente uma descrição das aulas assistidas e lecionadas e uma reflexão sobre as metodologias de ensino implementadas. Por fim é feita uma abordagem no que se refere às atividades extracurriculares desenvolvidas na escola, bem como às atividades realizadas no contexto da Direção de Turma.

2. O agrupamento de escolas António Gedeão

2.1. O Município de Almada-Localização do agrupamento

O Município de Almada, onde se localiza o Agrupamento de Escolas António Gedeão, está situado na região metropolitana de Lisboa, pertencente ao distrito de Setúbal.

De acordo com os censos de 2011, o município de Almada compreende um território de 17,21 km^2 com cerca de 174 030 habitantes subdividido em cinco freguesias: União das freguesias de Almada, Cova da Piedade, Pragal e Cacilhas, União das freguesias de Caparica e Trafaria, União das freguesias de Charneca de Caparica e Sobreda, freguesia da Costa da Caparica e União das Freguesias de Laranjeiro e Feijó (Figura 2.1). Almada é a sede do município, elevada à categoria de cidade em 1973, atualmente considerada a décima cidade mais populosa de Portugal (censos 2011).

O município é limitado a leste pelo município do Seixal, a sul por Sesimbra, a oeste pelo Oceano Atlântico, abrindo-se a norte e nordeste para o Estuário do Tejo, frente aos concelhos de Lisboa e Oeiras. O rio Tejo é o mais extenso rio da Península Ibérica estendendo-se ao longo de 1009 quilómetros e desagua entre Almada e Oeiras.

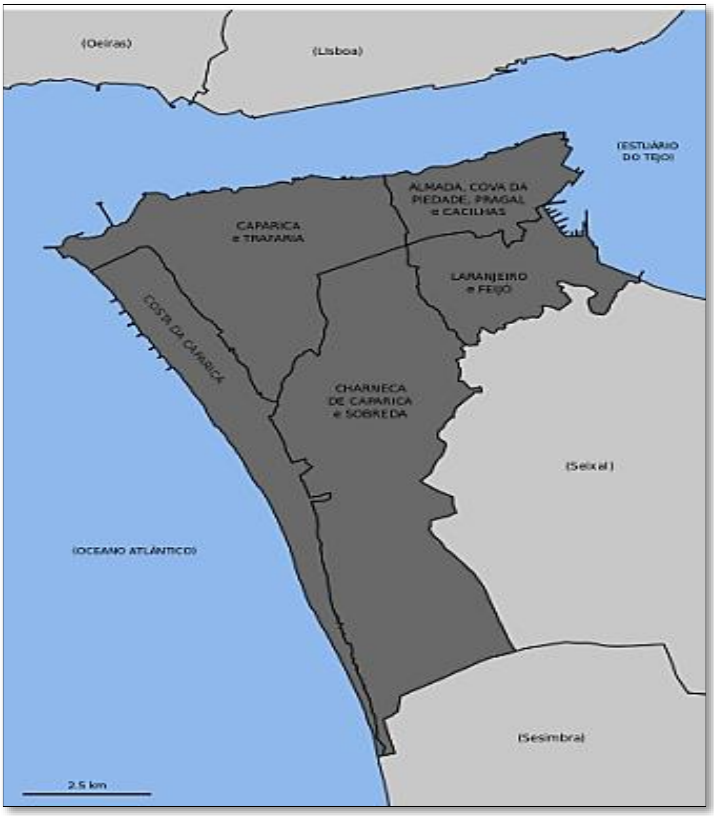


Figura 2.1 – Mapa do concelho de Almada e as suas freguesias após a reorganização administrativa de 2013

Em Almada, mais especificamente na freguesia de Pragal, situa-se o famoso Santuário Nacional de Cristo Rei (Figura 2.2), um monumento indissociável da imagem de Almada. A ideia da construção do Monumento a Cristo Rei surge em 1934, aquando de uma visita ao Brasil do então Cardeal Patriarca de Lisboa, D. Manuel Gonçalves Cerejeira. Ao passar pelo Rio de Janeiro, viu a imponente imagem de Cristo Redentor do Corcovado e logo no seu coração nasceu o desejo de construir semelhante obra em frente a Lisboa. Antes da derradeira II Guerra Mundial os bispos portugueses fizeram uma promessa que se Portugal fosse poupado da guerra o monumento seria construído. Assim sucedeu, a construção contou com a aprovação de todos os Bispos de Portugal e a primeira pedra do monumento foi lançada em 18 de dezembro de 1949. Foi inaugurado a 17 de maio de 1959 no dia de Pentecostes.

Figura 2.2 – Vista panorâmica do Santuário de Cristo Rei

Almada assume-se como uma cidade educadora e do conhecimento, apostando no ensino como um pilar estratégico do desenvolvimento local. O concelho está dotado de uma ampla rede de estabelecimentos de ensino do pré-escolar ao ensino superior, passando pelo ensino profissional, ensino sénior e escolas noturnas. De acordo com os dados do PORDATA, em 2017 existiam 120 estabelecimentos, para um total de 29617 alunos. Cerca de 49% dos estabelecimentos e 81% dos alunos pertencem à rede pública.

O concelho de Almada é o segundo maior pólo universitário da Área Metropolitana de Lisboa, destacando-se com sete instituições: Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Instituto Piaget (inclui a Escola Superior de Educação e o Instituto de Estudos Interculturais e Transdisciplinares), Escola Superior de Saúde Egas Moniz, Instituto Superior de Ciências da Saúde Egas Moniz, Escola Naval e Escola Superior de Tecnologias Navais. Almada disponibiliza ainda a Universidade Sénior de Almada (USALMA), frequentada por cerca de 700 formandos e 80 docentes e a Universidade Sénior D. Sancho I.

2.2. António Gedeão. O patrono do agrupamento

António Gedeão nunca existiu como pessoa. O nome surgiu pela primeira vez em 1956 no panorama literário nacional com a publicação da obra “Movimento Perpétuo”. A personagem foi criada através da mesma publicação pelo Professor de Ciências Físico-Químicas, historiador e divulgador da Ciência, Rómulo Vasco da Gama de Carvalho (Figura 2.3).

A maturidade, qualidade, originalidade, bem como a espontaneidade da primeira obra de António Gedeão fez com que a sua estreia literária fosse recebida com entusiamo pela crítica. Foi uma poesia considerada inovadora com uma estrutura poética bastante diferenciada das que foram produzidas até então.

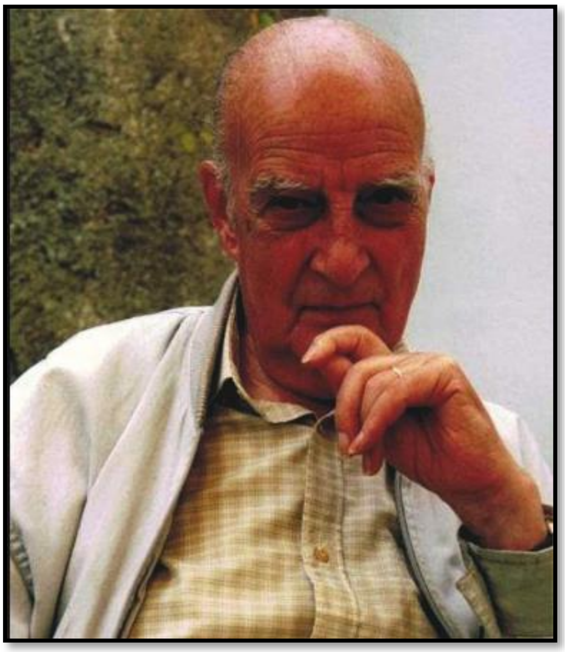


Figura 2.3 – Rómulo de Carvalho / António Gedeão

Rómulo de Carvalho nasceu em Lisboa na freguesia da Sé a 24 de novembro de 1906, onde cresceu juntamente com as irmãs, num ambiente familiar profundamente marcado pela figura materna, cuja influência foi decisiva para a sua vida, onde se escrevia poesia e se adquiriam, sempre que possível, livros. Era filho de um funcionário dos correios José Avelino da Gama de Carvalho e de Rosa das Dores Oliveira Gama de Carvalho, que tinha como grande paixão a literatura.

A sua mãe transmitiu esse sentimento ao filho Rómulo. Através da mãe, que comprava alguns livros, começou a ter contactos com alguns mestres da literatura, Camões, Eça, Camilo e Cesário Verde. Já aos cinco anos de idade escreve os primeiros poemas e aos dez anos decidiu completar “Os Lusíadas” de Camões.

Mais tarde quando entrou para o Liceu, teve um primeiro contacto com as ciências que despertou nele um grande interesse. Após a conclusão dos estudos liceais, Rómulo de Carvalho sentia-se apto, de igual forma, para as ciências e para as letras. Acreditava que poderia continuar a escrever poesia enquanto frequentava um curso de Físico-Químicas cujas atividades experimentais o fascinavam.

Descobriu ainda durante a juventude que o ensino era sua opção de vida, lecionando mais tarde no Liceu Camões e no Liceu Pedro Nunes. Enquanto professor apresentava-se aos jovens com a frescura que permitia utilizar os mais insignificantes objetos que o rodeavam em meios para lhes cativar a atenção e assim desencadear o gosto pelo saber. Como investigador da ciência foi um comunicador que se moveu de tal modo nesse domínio que se tornou compreensível, por exemplo, através das obras “Física para o Povo” publicada até aos anos setenta e “Ciências Para Gente Nova”.

O professor Rómulo de Carvalho em 1974, e após 40 anos de ensino, decidiu reformar-se. Mas continuou a publicar inúmeros livros, tanto de divulgação científica, como de história da ciência. Quando completou 90 anos de idade, em 1996, foi homenageado a nível nacional, tendo sido reconhecido publicamente por personagens da política, da ciência, das letras e da música.

É importante salientar que a 31 de agosto de 1992 foi atribuído o nome de António Gedeão à escola da Cova da Piedade - Escola Secundária António Gedeão - por despacho do Secretário de Estado dos Recursos Educativos, José Manuel Bracinha Vieira. A escola realiza todos os anos, a 25 de maio, uma comemoração em homenagem ao patrono António Gedeão.

Rómulo de Carvalho morreu no dia 19 de fevereiro de 1997, na Unidade de Cuidados Intensivos do Hospital de Santa Maria, em Lisboa.

"Eu, quando choro,
não choro eu.
Chora aquilo que nos homens
em todo o tempo sofreu.
As lágrimas são as minhas
mas o choro não é meu. "

António Gedeão, Gota de Água in Movimento Perpétuo

2.3. Constituição do Agrupamento

O Agrupamento de Escolas António Gedeão (AEAG), código 170940, enquanto unidade organizacional do ensino público, foi homologado por despacho do Secretário de Estado do Ensino e da Administração Escolar de 1 de abril de 2013. A 22 de abril de 2013 procedeu-se à agregação da Escola Secundária António Gedeão com o Agrupamento de Escolas Comandante Conceição e Silva.

O Agrupamento de Escolas Comandante Conceição e Silva tinha sido formado a 29 de agosto de 2003 no âmbito do novo modelo de autonomia e gestão das escolas e era constituído por cinco estabelecimentos de educação e ensino, enquanto que a escola Secundária António Gedeão era uma escola não agrupada e inaugurada em 1983. A junção da escola secundária António Gedeão, com o Agrupamento de Escolas Comandante Conceição e Silva, resultou no AEAG constituído por seis estabelecimentos de educação e ensino, repartidos entre o pré-escolar, ensino básico e ensino secundário. Na Tabela 2.1 consta a indicação das escolas do agrupamento, a localidade de cada uma delas e dos ciclos de ensino que possuem.

Tabela 2.1 – Estabelecimentos de ensino do AEAG e os ciclos de ensino

Jardins de infância e escolas	EPE	1.º CEB	2.º CEB	3.º CEB	SEC.
Escola Secundária António Gedeão, Cova da Piedade, Almada				X	X
Escola Básica Comandante Conceição e Silva, Cova da Piedade, Almada			X		
Escola Básica de Alfeite, Almada	X	X			
Escola Básica n.º 1 da Cova da Piedade, Almada	X	X			
Escola Básica n.º 2 da Cova da Piedade, Almada	X	X			
Escola Básica n.º 3 do Laranjeiro, Almada	X	X			

O agrupamento integra ainda duas unidades de ensino estruturado para a educação de alunos com perturbações do espectro do autismo, uma na Escola Básica n.º 3 do Laranjeiro e outra na Escola Básica Comandante Conceição e Silva. Destacam-se ainda alguns cursos vocacionais e profissionais na Escola Secundária António Gedeão.

2.4. Projeto Educativo

Segundo o Decreto-Lei n.º 75/2008, de 22 de abril, a autonomia é a faculdade reconhecida ao agrupamento de escolas ou à escola não agrupada pela lei e pela administração educativa, de tomar decisões nos domínios da organização pedagógica, da organização curricular, da gestão dos recursos humanos, da ação social escolar e da gestão estratégica, patrimonial, administrativa e financeira, no quadro das funções, competências e recursos que lhe estão atribuídos. De acordo com o mesmo decreto um dos instrumentos do exercício da autonomia de todos os agrupamentos de escolas e escolas não agrupadas é o seu projeto educativo, que consagra a orientação educativa do agrupamento de escolas ou da escola não agrupada, elaborado e aprovado pelos seus órgãos de administração e gestão para um horizonte de três anos, no qual se explicitam os princípios, os valores, as metas e as estratégias segundo os quais o agrupamento de escolas ou escola não agrupada se propõe cumprir a sua função educativa.

O Projeto Educativo do AEAG é elaborado com o contributo de toda a comunidade educativa e assegura a coerência e a unidade da ação educativa do agrupamento, definindo linhas estruturantes em consonância com a sua missão, visão, valores e os princípios orientadores. Relativamente à missão, o AEAG é uma instituição que procura organizar-se em função dos alunos, promovendo a formação integral dos alunos que o frequentam, tornando os cidadãos de excelência, conscientes, com sentido crítico e preparados para os desafios futuros, sejam eles académicos ou profissionais. Quanto à visão, as escolas do Agrupamento António Gedeão pretendem afirmar-se como um espaço de intervenção contínua de toda a comunidade educativa, instituições de referência, inovadoras e promotoras da Educação para todos, proporcionando uma escolaridade qualificada às suas crianças e jovens.

O Projeto Educativo do AEAG é alicerçado pelos valores como Inclusão, Solidariedade, Equidade, Cooperação, Liberdade, Ética, Responsabilidade Ambiental e Respeito. Quanto aos princípios orientadores do agrupamento destacam-se:

- Princípio pedagógico – a dimensão pedagógica é a prioridade educativa do agrupamento e que se sobrepõe às outras dimensões;
- Princípio da responsabilidade social – este princípio tem como objetivo a inserção na comunidade, sendo esta uma obrigação e um benefício que o agrupamento deve encarar diariamente, sobrepondo-se o "bem comum" ao interesse pessoal;
- Princípio humanista – cada elemento do Agrupamento ou a este ligado (alunos, professores, assistentes, famílias...) é primeiro uma pessoa e tratado como tal e não apenas como "recurso", "agente" ou "ator". Cada um tem um papel específico na ação educativa, que deve ser valorizado;
- Princípio da inovação – ser capaz de educar, de formar e de construir com criatividade e recorrendo a novas técnicas e tecnologias;
- Princípio das lideranças partilhadas – a nível das estruturas intermédias estabelecem-se diferentes níveis de responsabilidade e participação nas decisões. Todos os responsáveis do agrupamento num ambiente dinâmico interagem cooperativamente, estabelecendo relações entre si de forma a atingirem um objetivo comum;
- Princípio da equidade e justiça – este deverá estar sempre presente nos documentos orientadores do Agrupamento e na atuação de todos os elementos da comunidade educativa.

2.5. Meio socioeconómico

Relativamente ao ano letivo de 2016-2017, cerca de 5% do total de alunos do AEAG era estrangeira, oriunda de países como o Brasil, Cabo Verde, Moldávia, S. Tomé e Príncipe e China, entre outros. A população escolar é proveniente de um meio social muito diversificado, em que prevalece a "classe média", mas com um importante número de alunos carenciados. No ano letivo de 2018-2019 27,6% do total de alunos do AEAG beneficiou de auxílios económicos, no âmbito da Ação Social Escolar. Entre os beneficiados, 60% é abrangido pelo escalão "A" e 38% pelo escalão "B".

No que respeita às tecnologias de informação e comunicação, de acordo com os dados do ano letivo 2016-2017, 22% dos alunos do ensino básico e 93% do secundário possui computador com internet em casa.

Os dados de 2016-2017 relativos às profissões dos pais ou encarregados de educação demonstram que a maioria é empregada de comércio e serviços, outros são quadros técnicos ou com profissões liberais. Também há médicos, professores, empresários e militares. Uma minoria trabalha na produção e em serviços pessoais e domésticos. Verifica-se que 42% dos pais e das mães dos alunos do ensino básico e 33% dos do secundário exerce atividades de nível superior e intermédio. Quanto às habilitações literárias dos pais e das mães, a maioria frequentou o 3.º ciclo ou o ensino secundário, tendência que tem aumentado muito nos últimos anos devido à oferta formativa existente no Concelho, seguindo-se os que frequentaram o ensino superior. Subsistem ainda situações de encarregados de educação que têm apenas o primeiro ciclo. Destaca-se 27% dos pais e das mães dos estudantes do ensino básico com habilitação superior e 32% com o ensino secundário.

2.6. Alunos, corpo docente e não docente

No ano letivo de 2018/2019 o AEAG possuía 2112 alunos distribuídos por 92 turmas desde educação pré-escolar ao ensino secundário. De acordo com os dados fornecidos, 223 eram alunos da educação pré-escolar; 799, 414 e 413 frequentaram respetivamente o 1.º, 2.º e 3.º ciclo do ensino básico, sendo que no 3.º ciclo 14 alunos pertenceram a uma turma do Percurso Curricular Alternativo (PCA). O ensino secundário era frequentado por 263 alunos, dos quais 224 são do ensino regular (dez turmas) e 39 do ensino profissional (três turmas). Na Tabela 2.2 consta a distribuição das turmas e dos alunos por nível de ensino.

Tabela 2.2 – Nº de turmas e nº de alunos por nível de ensino

Nível de ensino	Nº de Turmas	Nº de Alunos
Pré-escolar	10	223
1.º Ciclo	34	799
2.º Ciclo	17	414
3.º Ciclo (PCA)	18	413
Secundário (c/profissional)	13	263
Total do Agrupamento	92	2112

Na Tabela 2.2 pode-se observar ainda que o 1.º ciclo se destaca com maior número de alunos relativamente aos outros níveis de ensino do agrupamento e o ensino pré-escolar com menor número de alunos relativamente aos demais.

No que respeita ao pessoal docente, o agrupando possuía, no ano letivo 2018-2019, 200 docentes, dos quais 160 (80%) pertenciam ao Quadro do Agrupamento ou ao Quadro da Zona Pedagógica e 40 (20%) eram contratados. A experiência profissional do corpo docente é significativa, pois 91% leciona há 10 ou mais anos. Na Tabela 2.3 consta o número de docentes do agrupamento de acordo com o grupo de recrutamento a que pertencem. No que se refere ao pessoal não docente, o agrupamento dispõe de 67 assistentes operacionais, 9 assistentes técnicos e 1 psicólogo.

Tabela 2.3 – Número de docentes do AEAG em função do grupo de recrutamento

Grupo de Recrutamento	Número de docentes	Grupo de Recrutamento	Número de docentes
100 – Educação pré-escolar	10	400 – História	5
110 – 1.º Ciclo	46	410 – Filosofia	3
120 – Inglês 1.º ciclo	2	420 – Geografia	4
200 – Português e Est. Sociais/Hist.	4	430–Economia e Contabilidade	2
210 – Português e Francês	6	500 – Matemática	12
220 – Português e Inglês	4	510 – Física e Química	8
230 – Matemática e CN	8	520 – Biologia e Geologia	9
240 – Educação Visual e Tec.	5	530 – Educação Tecnológica	4
250 – Educação Musical	5	550 – Informática	2
260 – Educação Física	4	560 – Ciências Agropecuárias	2
290 – Ed. Moral e Religiosa	2	600 – Artes Visuais	3
300 – Português	11	620 – Educação Física	8
320 – Francês	3	910 – Educação Especial	20
330 – Inglês	7	999–Técnicas Especiais/Psicólogo	1
		TOTAL	**200**

2.7. Oferta educativa

Em relação à oferta educativa, como já foi referido, são lecionados os diferentes níveis do ensino regular, desde a educação pré-escolar ao ensino secundário, passando pelos três ciclos do ensino básico. A nível do ensino secundário, o agrupamento disponibiliza os cursos do ensino regular onde é vasta a oferta opcional de disciplinas para as respetivas formações específicas, sendo que a mesma é atualizada anualmente em conformidade com a procura dos alunos.

No ano letivo 2018-2019, para além da oferta regular e procurando responder de forma ainda mais completa às necessidades e interesses dos alunos, estiveram também em funcionamento, no 3.º ciclo, uma turma de PCA e três turmas do ensino profissional (Técnico de Turismo – 1.º ano, 2 turmas e Técnico de Comércio – 3.º ano, 1 turma) com equivalência ao 12.º ano. Os cursos do ensino profissional são atualizados anualmente de acordo com a procura. Destacam-se ainda duas unidades de ensino estruturado, para 1.º e 2.º ciclos, que apoiam crianças com perturbação do espectro de autismo. Na Tabela 2.4 está sintetizada a oferta formativa de acordo com as áreas e modalidades de ensino.

Tabela 2.4 – Áreas e modalidades de oferta formativa existentes no agrupamento

<table>
<tr><th>Oferta formativa</th><th>Modalidade</th><th>Estabelecimento de ensino</th></tr>
<tr><td>Ensino Estruturado
(1.º e 2.º ciclo)</td><td>-</td><td>E. B. n.º 3 do Laranjeiro
E. B. C. Conceição e Silva</td></tr>
<tr><td>Educação pré-escolar</td><td>-</td><td rowspan="2">E. B. de Alfeite
E. B. n.º 1 e n.º 2 da Cova da Piedade
E. B. n.º 3 do Laranjeiro</td></tr>
<tr><td>Ensino Básico (1.º ciclo)
(1.º ao 4.º ano)</td><td>Currículo do Ensino Básico Geral</td></tr>
<tr><td>Ensino Básico (2.º ciclo)
(5.º e 6.º ano)</td><td>Currículo do Ensino Básico Geral</td><td>E. B. C. Conceição e Silva</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ensino Básico (3.º ciclo)
(7.º ao 9.º ano)</td><td>Currículo do Ensino Básico Geral</td><td rowspan="9">Escola Secundária António Gedeão</td></tr>
<tr><td>Curso de Ensino Vocacional (PCA)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Ensino Secundário
(10.º ao 12.º ano)</td><td>Ciências e Tecnologias</td></tr>
<tr><td>Ciências Socioeconómicas</td></tr>
<tr><td>Línguas e Humanidades</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Ensino Profissional
(Duração de 3 anos)</td><td>Técnico de Turismo</td></tr>
<tr><td>Técnico de Comércio</td></tr>
<tr><td>Técnico de Animação Sociocultural</td></tr>
<tr><td>Técnico de Apoio À Infância</td></tr>
</table>

2.8. Estrutura administrativa

Atualmente no Agrupamento existem as estruturas de gestão pedagógica e executiva: Conselho Geral do Agrupamento, Direção, Conselho Pedagógico, Conselho de Coordenadores de Escola e Conselho Administrativo. Relativamente ao Conselho Geral do Agrupamento, este é constituído pelo presidente, oito representantes do pessoal docente, dois representantes do pessoal não docente, um representante dos alunos, cinco representantes de pais e encarregados de educação, três representantes das autarquias e dois representantes da comunidade local. Quanto à Direção esta é constituída pelo diretor, subdiretora, três adjuntos do diretor e dois assessores da direção. O diretor também desempenha a função de presidente do Conselho Administrativo e Pedagógico e é responsável pela coordenação de projetos, cursos de ensino profissionalizante e percursos curriculares alternativos.

O Conselho Pedagógico está constituído pelo presidente, sete coordenadores do departamento, três coordenadores dos diretores de turma, coordenador da comissão de avaliação interna do agrupamento, coordenador das bibliotecas escolares e o representante do Serviço de Psicologia e Orientação. No que se refere ao Conselho Administrativo, este é regido pelo presidente, subdiretora e chefe de serviços. Para o Conselho de Coordenadores do Agrupamento integram o coordenador da comissão de avaliação do agrupamento, o coordenador das bibliotecas escolares, os seis coordenadores dos estabelecimentos do ensino básico, os quatro coordenadores de ano (1.º ao 4.º ano), os três coordenadores dos diretores de turma, os sete coordenadores de departamento e os coordenadores de cada um dos grupos de recrutamento.

2.9. A Escola Secundária António Gedeão

A Escola Secundária, com 3.º ciclo do Ensino Básico de António Gedeão (ESAG), é a escola sede do AEAG, onde decorreram as atividades de estágio, e situa-se na união de freguesias de Laranjeiro e Feijó, mais especificamente na Alameda Guerra Junqueiro, Laranjeiro 2814-503, Almada. Na Figura 2.4 pode ver-se a entrada principal da escola secundária António Gedeão a partir da Alameda Guerra Junqueiro.

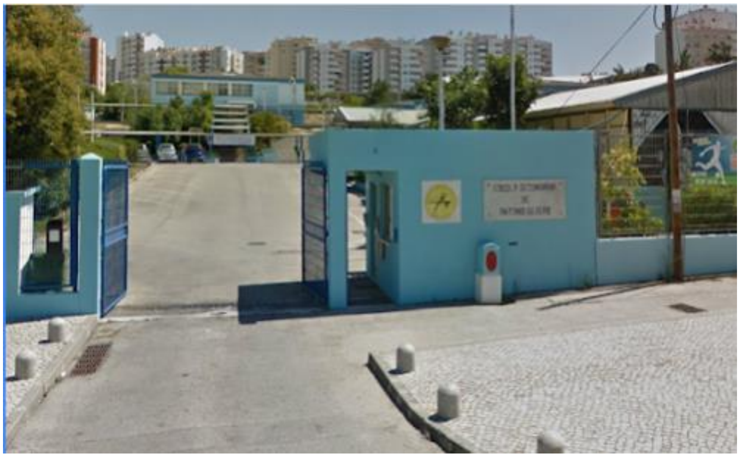


Figura 2.4 – Entrada principal da Escola Secundária António Gedeão

A ESAG, ocupando uma área aproximada de 36000 m^2, é constituída por seis pavilhões (A, H, E, R, D e L) e duas instalações desportivas (Figura 2.5). No Pavilhão H, funcionam a direção, o gabinete de serviços administrativos, o gabinete do projeto ENEAS, a sala EPIS, a secretaria, a biblioteca escolar, a sala de estudo, a sala de professores, a sala de diretores de turma, o gabinete médico, o gabinete de assistentes operacionais, os serviços de reprografia, as arrecadações e ainda os balneários.

O pavilhão A é constituído por treze salas de aulas, duas arrecadações e dois balneários. Quanto ao pavilhão E, este é composto por nove salas de aulas, uma sala de reuniões, três balneários, o gabinete de ensino especial, o gabinete de Matemática, o gabinete de estagiários e uma arrecadação. No pavilhão D, a escola dispõe de oito salas de aulas, três laboratórios (Física, Química e Biologia), incluindo duas arrecadações associadas aos laboratórios, três gabinetes (Psicologia, Orientação Escolar e Conselho Geral), dois balneários e, por fim, duas arrecadações.

No que concerne ao pavilhão L, este era o antigo pavilhão de jogos, mas atualmente funcionam uma sala de convívio / jogos, uma associação de alunos, uma papelaria, a sala de educação tecnológica e a sua arrecadação, uma sala de teatro, uma sala de cerâmica e a respetiva arrecadação, dois balneários e uma arrecadação para produtos de limpeza. Já no pavilhão R os alunos e o pessoal não docente podem desfrutar dos serviços do bar e do refeitório com as suas respetivas salas e dois balneários.

Figura 2.5 – Vista aérea da Escola Secundária António Gedeão (Fonte - Google maps)

Tendo em conta a grande mudança tecnológica e a sua utilização crescente, existe uma diversidade de tecnologias disponíveis na ESAG. Todas as salas de aulas estão equipadas com quadros brandos, computadores com acesso à internet e retroprojetor. Os computadores, para além do registo de sumários e faltas possibilitam outras dinâmicas para a lecionação de aulas com recurso a materiais multimédia. Destacam-se ainda algumas salas de aulas com televisão e quadros interativos disponíveis, mas que são pouco utilizadas. Para além dos computadores das salas de aulas, existem duas salas de informática com vários computadores para o uso pelos alunos. Estão equipadas, também com computadores, a biblioteca e a sala de estudo onde os alunos podem realizar trabalho autónomo ou em grupo. A Biblioteca, mediante marcação prévia, pode ser requisitada para a lecionação de aulas com recurso a estes equipamentos informáticos.

A ESAG inicialmente era composta por cinco pavilhões (E, D, H, L e R). O pavilhão A, situado junto à entrada principal da escola e que tem piores condições, é um pré-fabricado construído com o objetivo de dar resposta à procura existente e que inicialmente tinha caráter temporário. No entanto, está em funcionamento para atividades letivas há mais de 30 anos. A climatização das salas de aula, deste e de todos os outros pavilhões, muito quentes no verão e muito frias no inverno, dificulta o bom funcionamento da atividade letiva.

Nas instalações desportivas realizam-se todas as atividades desportivas da escola. O pavilhão desportivo está equipado por dois recintos desportivos, sala dos equipamentos, professores e assistentes, bem como os balneários. O recinto descoberto dispõe de campo sintético e balneários.

Importa referir que a escola inicialmente começou por oferecer à comunidade educativa apenas o 3.º ciclo do ensino básico, sendo que o ensino secundário teve início a partir do ano letivo de 1990-1991.

A Escola tem capacidade aproximada para 900 alunos. No início do ano letivo de 2018/2019 a escola tinha 745 alunos, mas terminou o ano letivo com 676 alunos, distribuídos por dois ciclos do ensino regular, sendo 17 turmas do 3º ciclo e 10 turmas do secundário, 1 turma do PCA e 3 turmas do Ensino Profissional. A ESAG acolhe alunos oriundos da freguesia de Laranjeiro e Feijó, mas também de outras freguesias. Na Tabela 2.5 consta o número de turmas e o número de alunos de acordo com o ano de escolaridade, no ano letivo 2018-2019.

Quanto ao pessoal docente da ESAG, 81 (80,2%) pertencem ao Quadro do Agrupamento, 4 (4%) pertencem ao Quadro da Zona Pedagógica e 16 (15,8%) são contratados.

Tabela 2.5 – Nº de turmas e nº de alunos, por ano de escolaridade, da ESAG

<table>
<tr><th colspan="3">3.º Ciclo</th><th></th><th colspan="3">Secundário</th></tr>
<tr><th>Ano</th><th>N.º turmas</th><th>N.º alunos</th><th></th><th>Ano</th><th>N.º turmas</th><th>N.º alunos</th></tr>
<tr><td>7.º ano (E.R)</td><td>6</td><td>151</td><td></td><td>10.º (E.R)</td><td>3</td><td>81</td></tr>
<tr><td>8.º ano (E.R)</td><td>6</td><td>130</td><td></td><td>10.º (E.P)</td><td>2</td><td>24</td></tr>
<tr><td>8.º ano (P.C.A)</td><td>1</td><td>14</td><td></td><td>11.º (E.R)</td><td>3</td><td>63</td></tr>
<tr><td>9.º ano (E.R)</td><td>5</td><td>118</td><td></td><td>12.º (E.R)</td><td>4</td><td>80</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Total 3.º Ciclo</td><td rowspan="2">18</td><td rowspan="2">413</td><td></td><td>12.º (E.P.)</td><td>1</td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Total Sec.</td><td>13</td><td>263</td></tr>
<tr><td>Total</td><td colspan="2">31 turmas</td><td colspan="4">676 alunos</td></tr>
</table>

E.R - Ensino Regular; E.P – Ensino Profissional; P.C.A – Percurso Curricular Alternativo

3. A Atividade de Estágio

Durante o ano letivo 2018-2019 a professora orientadora do estágio lecionou uma turma do 3.º ciclo e duas turmas do secundário, mais especificamente as turmas dos 9.º, 10.º e 12.º anos. No decorrer do estágio pedagógico o professor estagiário assistiu as aulas nas três turmas e lecionou a maioria das aulas nas turmas dos 9.º e 10.º anos e apenas uma aula no 12.º ano. Relativamente à turma do 9.º ano, esta foi a turma de estágio em que o professor acompanhou com maior frequência, pelo que será pertinente efetuar uma caracterização pormenorizada da mesma.

3.1. Caracterização da turma de estágio

Horário da turma

O horário da turma era composta por 10 disciplinas e 31 tempos letivos. Como se mostra na Tabela 3.1, os alunos tinham duas tardes livres, à terça e quinta, e nos restantes dias tinham aulas até às 16h05. Destaca-se um tempo letivo ocupada pela oferta complementar (OC) às segundas-feiras. Relativamente à OC, foi decidido pela escola que esta seria para reforço das disciplinas de Português e Matemática com a duração de um semestre, e uma vez que são disciplinas de exame nacional. Relativamente à disciplina de Matemática, esta ocupava 5 tempos semanais de 50 minutos no horário da turma e mais 1 tempo de 50 minutos da OC durante o primeiro semestre.

Tabela 3.1 – Horário da turma do 9.º ano

	Segunda	**Terça**	**Quarta**	**Quinta**	**Sexta**
8.15 - 9.05	GEO	**MAT**	EF	EV	HIST
9.15 - 10.05	CN	EF	ESP	EV	EF
10.20 - 11.10	FQ	CN	GEO	FQ	ING
11.20 - 12.10	ESP	PORT	GEO/HIST	PORT	**MAT**
12.20 - 13.10		PORT	HIST	PORT	**MAT**
13.15 - 14.05	**MAT**				
14.15 - 15.05	**MAT**		ING		CN(T1) FQ(T2)
15.15 - 16.05	**OC**		ING		CN(T2) FQ(T1)

Caracterização

Para efetuar uma caracterização da turma foi elaborado um inquérito à turma no 3.º período que teve por base um conjunto de questões consideradas relevantes para um melhor conhecimento dos alunos, relativamente ao contexto familiar, contexto escolar e os hábitos diários.

No início do ano letivo a turma era constituída por 22 alunos. No 1.º período um aluno brasileiro regressou ao Brasil e no 2.º período entraram dois alunos brasileiros na turma, um dos quais em janeiro e o outro em março, passando a turma a ser constituída por 23 alunos. A turma era composta por 15 alunos do sexo masculino e 8 do sexo feminino. As idades dos alunos no início do ano letivo eram compreendidas entre os 13 e os 15 anos, sendo que a maioria tinha 14 anos (57% do total de alunos) como se pode ver na Figura 3.1. Importa salientar que vários alunos fizeram anos entre o segundo e o terceiro período passando a maioria de 14 anos para 15 anos.

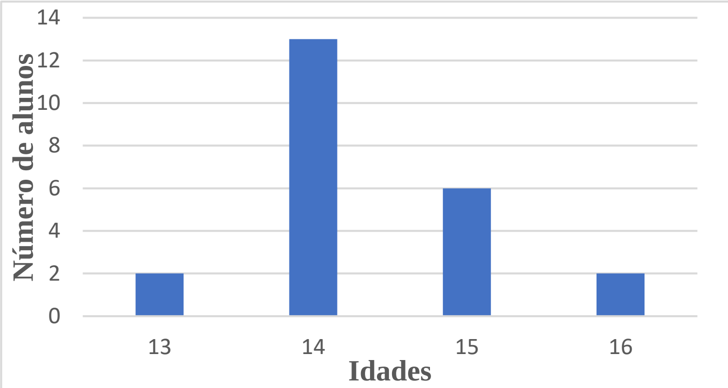


Figura 3.1 – Idade dos alunos da turma do 9.º ano no início do ano letivo

Verificou-se que 17 alunos tinham apenas nacionalidade portuguesa (embora um deles seja descendente cabo-verdiano), 4 possuíam dupla nacionalidade, sendo uma portuguesa e outra estrangeira entre as quais timorense, angolana, cabo verdiana e brasileira. Os restantes 2 alunos tinham apenas nacionalidade brasileira. Existiam na turma dois alunos repetentes e um dos alunos tinha necessidades educativas especiais. Quanto ao número de retenções ao longo do percurso escolar, 16 afirmaram que nunca reprovaram, 5 já reprovaram uma vez e 2 reprovaram duas vezes.

No que respeita à localidade de residência dos alunos, verificou-se que a maioria residia no Laranjeiro, onde se localiza a ESAG e na Cova da Piedade, localidade próximo da ESAG. Os restantes alunos residem nos locais próximos ou nos arredores, como é o caso das localidades, Miratejo, Feijó, Corroios, Vale Flores, Cruz de Pau e Monte Caparica.

A atividade de tempos livres mais referenciada foi “estar no telemóvel ou tablet (a jogar, nas redes sociais, etc.)”. As atividades “ouvir música”, “ver televisão”, “estar no computador” e “praticar desporto” foram também das mais selecionadas como atividade de tempos livres dos alunos da turma. Essa constatação vem reforçar a ideia do envolvimento em massa dos alunos com as tecnologias no seu dia a dia.

Quando os alunos foram questionados sobre a disciplina favorita, Ciências Naturais é a que recolheu mais respostas, seguida de História e Educação Visual. Importa salientar que apenas três alunos selecionaram a Matemática como favorita, a disciplina de Português não foi selecionada por nenhum aluno e quatro alunos afirmaram que não têm preferência. As disciplinas de Português e Matemática foram das mais indicadas como disciplinas que suscitam menos interesse nos alunos. Verificou-se também que, apenas duas alunas afirmaram, não havia disciplina de que menos gostavam. Poderá isso estar aliado ao facto de que gostam de estudar qualquer disciplina. Apresentam-se na Figura 3.2 as informações sobre as disciplinas favoritas e as que os alunos menos gostam.

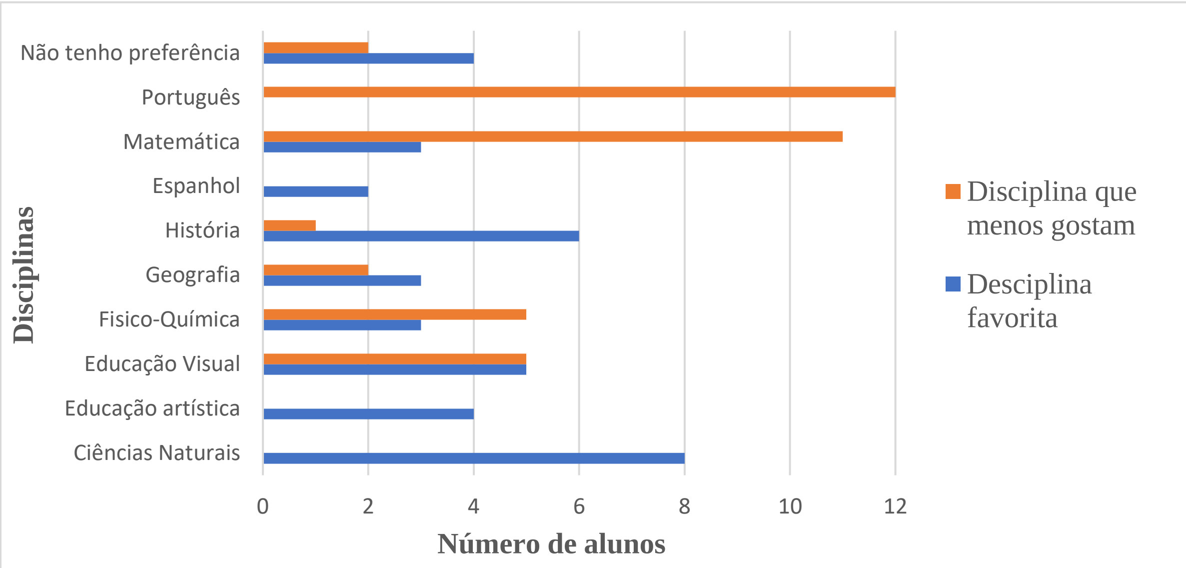


Figura 3.2 – Disciplinas favoritas e disciplinas que os alunos menos gostam

A maioria dos alunos frequentava a mesma turma desde o 7.º ano, por isso, revelara ser uma turma muito unida, embora se relacionassem em dois grupos, rapazes e raparigas. A professora titular não conhecia os alunos, sabendo apenas que estes tinham tido um momento menos bom na disciplina de Matemática, no ano letivo transato.

Desde o início do ano letivo a turma revelou bastantes dificuldades a Matemática, um pouco por causa do mau aproveitamento que a maioria teve no ano letivo anterior. Durante o período letivo constatou-se, principalmente nos rapazes, que alguns não registavam os conteúdos no caderno diário, não realizavam os trabalhos de casa, conversavam constantemente durante as aulas perturbando o bom funcionamento da mesma e não eram pontuais sobretudo nos intervalos dos recreios. Observando a turma desde do início do ano letivo, foi possível verificar que as dificuldades que muitos revelavam era principalmente pela postura que estes tinham na sala de aula e não propriamente relacionada com as aprendizagens. Alguns alunos ditos “fracos” só o eram porque não se esforçavam o suficiente e não demonstravam interesse. Em alguns casos, bastaria alguma atenção mais regular em sala de aula e um empenho mínimo para obterem resultados positivos.

Com o objetivo de conhecer melhor o percurso dos alunos, na disciplina de Matemática, ao longo do 3.º ciclo do ensino básico, apresenta-se no gráfico da Figura 3.3 a distribuição das classificações dos alunos correspondentes ao terceiro período nos 7.º e 8.º anos, com a exceção de uma aluna que veio de Angola e de três alunos que vieram do Brasil. Os dados foram recolhidos através da consulta das pautas dos 19 alunos e que foram facultados por um dos elementos da direção.

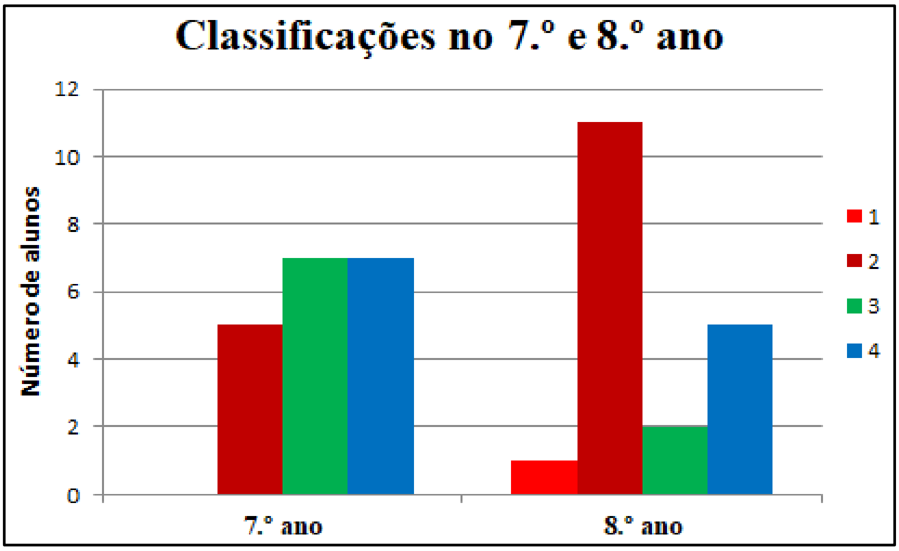


Figura 3.3 – Classificações dos alunos na disciplina de Matemática no 7.º e 8.º ano

As classificações revelam que houve um elevado número de alunos com negativas no 8.º ano, sendo que 11 alunos obtiveram nível 2 e um aluno nível 1. Relativamente ao 7.º ano isso não havia sucedido, pois apenas 5 alunos tiverem nível dois. No que concerne às notas positivas havia também grandes diferenças quanto ao número de alunos que atingiram o nível 3 nos dois anos e uma diferença acentuada no nível 4. Os resultados permitem concluir que a turma tinha piores resultados no 8.º ano, com o número de classificações negativas a aumentar de 5 (7.º ano) para 12 (8.º ano). O professor estagiário já tinha conhecimento de que a antiga professora do 8.º ano era bastante rigorosa com eles, naturalmente quando os questionei porque baixaram as notas, colocaram a culpa na antiga professora como forma de justificar os menos bons resultados. O certo é que também não era uma turma fácil e a postura da maioria na sala de aula e o reduzido compromisso com os trabalhos foram fatores que certamente contribuíram para os resultados que tiveram. Os próprios alunos assumiram ter uma má relação com a professora e, por isso demitiram-se da disciplina, com consequências nas aprendizagens e consequentemente nos resultados.

Relativamente ao aproveitamento da turma neste ano letivo, os resultados obtidos nos testes de avaliação nos três períodos, excluindo os dois alunos que entraram no segundo período, permitem constatar que a média dos resultados do 1.º teste (próximo dos 80%) é bastante superior, quando comparado com a média dos restantes testes, uma vez que esta envolvia um conteúdo mais acessível para os alunos, sem exigência ao nível dos pré-requisitos e também pelas estratégias utilizadas. Foi um teste realizado a dois tempos, tendo inclusive sido propostos exercícios extras, no segundo momento, para permitir aos alunos recuperar o menos bom desempenho, na primeira parte do teste, já realizada.

Já no 2.º teste os maus resultados tiveram um grande impacto na média reduzindo esse valor para os 35%. A partir do 2.º teste a média esteve sempre em oscilação, destacando a descida do 5.º para o último teste que, sendo global, envolvia mais conteúdos. Na figura 3.4. apresenta-se a média dos resultados dos seis testes realizados.

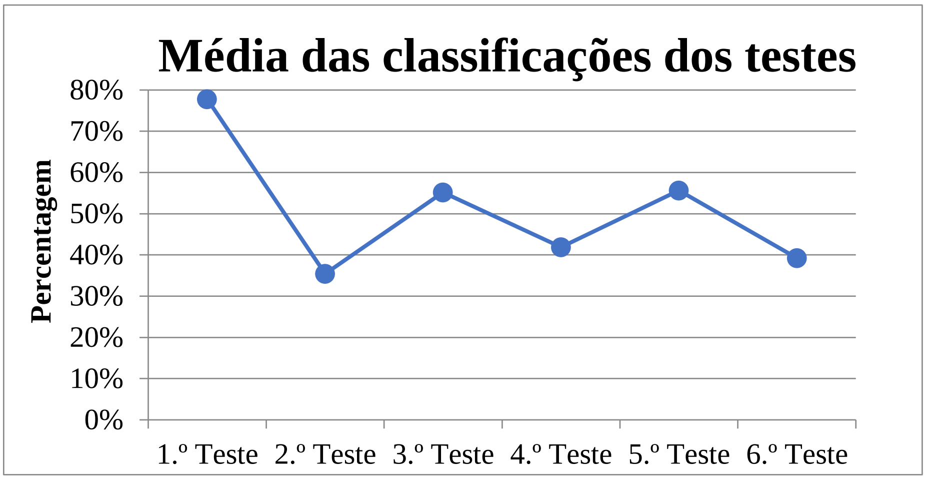


Figura 3.4 – Média das classificações da turma nos testes dos três períodos

No que respeita às avaliações finais dos três períodos, na Figura 3.5 comprova-se que nenhum aluno atingiu uma classificação de nível 5 nos três períodos. Pode observar-se também que, em cada um dos períodos, o número de positivas é superior ao número de negativas. Comparando o 3.º período do 9.º ano com o 3.º período do 8.º ano podemos verificar que os alunos tiveram uma melhoria significativa nos resultados. No entanto, os resultados poderiam ter sido melhores se não fosse o mau aproveitamento no ano anterior, que teve como consequência dificuldades significativas ao nível de alguns pré-requisitos, e a falta de interesse de muitos alunos na disciplina.

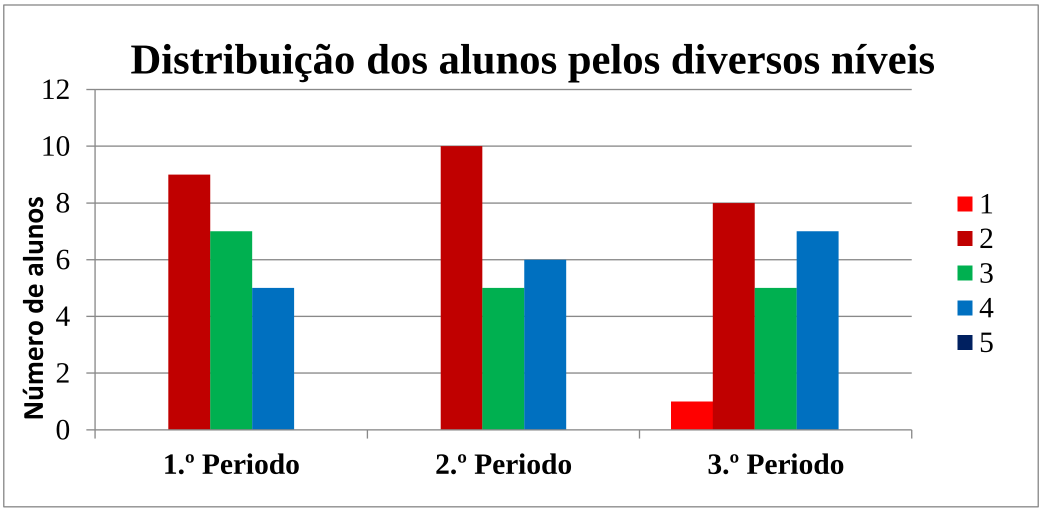


Figura 3.5 – Distribuição dos alunos pelos diversos níveis no 1.º, 2.º e 3.º período

No inquérito efetuado, numa das questões pretendia-se saber se os alunos consideram ou não que têm dificuldades a Matemática: 16 alunos deram resposta afirmativa e 7 consideravam que não. Quanto aos que consideram que têm dificuldades a Matemática, foram questionados sobre o motivo dessas dificuldades, tendo a maioria apontado a falta de estudo e as dificuldades na compreensão da explicação dada pelo(a) professor(a), bem como a falta de atenção e concentração.

Em relação à forma como os alunos estudam na escola e em casa, pode observar-se na Tabela 3.2 que a maioria estuda em casa sem companhia e na escola verifica-se a supremacia dos que não estudam. No tocante à frequência de algum centro de estudo, apenas 7 frequentam e 16 não frequentam.

Tabela 3.2 – Forma como os alunos estudam em casa e na escola

	Em casa	Na escola
Sozinho(a)	18	6
Acompanhado(a)	2	5
Não estudo	3	12

Tendo em consideração a dinâmica da sala de aula, questionaram-se os alunos sobre a preferência relativamente ao tipo de atividades que gostavam mais de realizar nas aulas de Matemática. Tal como se indica na Tabela 3.3, a preferência dos alunos foi claramente o trabalho de grupo. Esta foi uma resposta que mereceu alguma análise, tendo em conta alguns trabalhos de grupo que a professora titular e os professores estagiários propuseram. Foi sugerida uma atividade de grupo bastante interessante pela professora titular e os alunos fizeram algumas seções de trabalho na sala de aula, mas o fraco empenho, ou mesmo nenhum, de alguns alunos e grupos não permitiu a conclusão da atividade como tinha sido inicialmente pensada. Este exemplo permite-nos afirmar que possivelmente a maioria dos alunos gosta de trabalho em grupo na sala de aula porque é uma oportunidade para conversarem entre si e não produzirem qualquer trabalho, pois sempre que foi realizado trabalho deste tipo muitos alunos não revelaram posturas adequadas a esta dinâmica. Entre as preferências destacam-se também o trabalho a pares e os jogos matemáticos.

Tabela 3.3 – Preferência dos alunos sobre as dinâmicas de sala de aula de Matemática

Que dinâmica preferes ver nas aulas de Matemática?	N.º de alunos
Trabalho de grupo	15
Trabalho a pares	7
Aulas mais expositivas	5
Fichas de trabalho individual	3
Aulas em que o professor solicita mais a participação dos alunos	1
Aulas com tecnologias incluindo material áudio/vídeo	4
Jogos matemáticos	7
Outra	4

Pretendeu-se também saber qual é a opinião dos alunos relativamente à disciplina de Matemática, mais especificamente, numa pequena frase teriam que dizer o que é a Matemática para eles. As opiniões divergem entre aqueles que consideram a disciplina a solução para os problemas da vida, útil para o percurso escolar e para a sociedade e aqueles que vêm a disciplina como algo que complica a vida dos mesmos, em que alguns conteúdos não se aplicam nas suas vidas, é desinteressante e pouco chamativa. Apresenta-se de seguida algumas respostas dos alunos:

- “É uma forma de se conseguir resolver os problemas da vida”.
- “Vou ser o máximo sincero, não sei como vou usar a fórmula de Bhaskara na minha vida. A Matemática me complica muito e não é por falta de estudo, não me dou mesmo para isso, então para mim sinceramente usarei a subtração, divisão, multiplicação e adição e nada mais”.
- “Uma disciplina muito difícil e ao mesmo tempo muito útil e precisa”.
- “Para mim a Matemática é algo que é pouco interessante e pouco chamativa”.
- “Para mim a Matemática é uma disciplina que vai dar jeito nos meus próximos anos e que gosto muito”
- “Matemática para mim é mais fácil que outras disciplinas, porque maior parte dos exercícios são feitos de uma só maneira”.
- “Uma complicação de números e letras”.
- “Para mim a Matemática é tudo seja em casa, na escola, etc.…”.

Interessa-nos agora caraterizar o contexto socioeconómico e familiar dos alunos. Na turma havia 9 alunos que beneficiavam de subsídios de ação social escolar, dos quais 6 eram do escalão A e 3 do escalão B.

Na sua grande maioria os alunos vivem com os seus familiares mais próximos (pais – 4 alunos; pais e irmãos – 12 alunos), verificando-se, nalguns casos a existência de famílias monoparentais (mãe – 3 alunos; mãe e irmãos – 2 alunos; pai – 1 aluno; pai e irmãos – 1 aluno). Quanto aos encarregados de educação dos alunos, o gráfico da Figura 3.6 indica-nos que a mãe é a encarregada de educação da maioria dos alunos e um dos alunos tem como encarregado de educação o irmão ou a irmã.

Sendo a mãe a encarregada de educação da maioria dos alunos, é também a responsável familiar que habitualmente acompanha o percurso escolar dos alunos e estabelece contactos regulares com a escola ou com a diretora de turma, verificando-se dois casos em que seja apenas o pai e seis casos em que ambos são responsáveis.

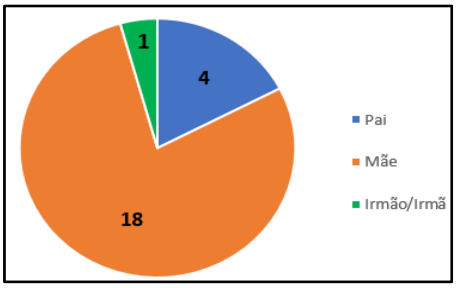


Figura 3.6 – Encarregado de educação dos alunos

Entre as habilitações literárias dos pais ou encarregados de educação destacam-se o 3.º ciclo e o Secundário. Alguns possuem licenciatura e o mestrado não teve indicações. No entanto, tendo em conta que alguns alunos não indicaram as habilitações dos pais e considerando as profissões indicadas abaixo, alguns dos pais ou encarregados de educação poderão possuir o mestrado.

Após uma análise dos dados dos alunos que indicaram as habilitações literárias dos encarregados de educação, verificou-se que mais de metade dos encarregados de educação completou pelo menos o ensino secundário; 18% dos encarregados de educação tinha o 3.º ciclo completo, e apenas um encarregado de educação completou o nível de ensino mais baixo (1.º ciclo). Quanto à ocupação profissional dos pais ou encarregados de educação, destacam-se serviços militares, técnica de ótica, professores, bancários, empresários, segurança, motoristas, contabilista, assessora de contratos públicos, assistentes operacionais, cabeleireiro, construtor civil, rececionista e serviços de desinfestação. Existem ainda situações de pais que estão desempregados ou em serviços domésticos. Alguns alunos não indicaram a situação profissional dos pais.

3.2. A planificação das aulas

Antes de qualquer aula lecionada, o professor estagiário procedeu a uma planificação prévia mediante a elaboração dos planos de aula. A preparação das aulas revelou ser um aspeto bastante relevante para a lecionação, dada a importância de definir com clareza todas as etapas do que se pretende fazer durante a aula de modo a evitar alguns fracassos no decorrer da mesma. A elaboração detalhada de um plano de aula, onde são definidos os objetivos, os conteúdos a serem trabalhados, o material utilizado, a metodologia e a duração dos momentos da aula proporcionou uma organização que facilitou a implementação das aulas.

A planificação das aulas foi apresentada à orientadora de estágio antes do dia previsto para as aulas (ainda que algumas vezes com pouca antecedência) onde me orientou sobre alguns aspetos a ter em conta, quer na elaboração do plano de aula, quer relacionadas com um determinado conteúdo a ser trabalhado durante as aulas. A professora também sugeriu, sempre que necessário, algumas alterações ao nível da sequência dos conteúdos, do grau de dificuldade de alguns exemplos, dos pré-requisitos que deviam ser revistos e que eram essenciais para o sucesso da aula, entre outras. Foram todas tidas em conta no plano, para que se pudesse diminuir o grau de imprevisibilidade e para que a aula decorresse da melhor forma possível.

Na fase inicial foram notórias as dificuldades na elaboração dos planos de aula, nomeadamente a estrutura que deve ter um plano de aula, o que deve ser incluído no plano, a escolha das tarefas e/ou exercícios, a concordância das tarefas ou exercícios com os objetivos traçados e o tempo de duração de cada um dos momentos da aula. Inicialmente, houve alguma indefinição da minha parte em relação àquilo que deveria estar incluído nos planos de aula, o que levou a que os primeiros planos de aulas, elaborados pelo professor estagiário, se focassem mais na descrição pormenorizada do que deve ser feito pelo professor a nível pedagógico e não incluíam uma fundamentação teórica subjacente aos conteúdos envolvidos. Essas dificuldades foram sendo suprimidas através da reflexão partilhada entre o professor e a orientadora de estágio o que permitiu adquirir alguma experiência na elaboração dos planos de aula com reflexos positivos na elaboração dos planos subsequentes.

De uma forma geral a estrutura dos planos de aula incluía os pontos propostos por Aranha (2004): Escola de lecionação, professores responsáveis, data e hora das aulas, ano e turma que foi lecionada, n.º da aula lecionada, instalação onde decorreu a aula, objetivos gerais e específicos que se pretendiam atingir, conteúdos a lecionar, materiais necessários e por fim a metodologia utilizada. Foram incluídas também os sumários, os pré-requisitos, sempre que necessários, as metas curriculares e a avaliação efetuada aos alunos.

O plano de aula foi visto como um documento de trabalho flexível podendo ser alterado pela prática, pelo que estavam sempre sujeitos a possíveis ajustamentos causados pelas dinâmicas das aulas. Desta forma procurou-se que a atuação do professor não se limitasse apenas ao que se encontrava discriminado no plano de aula e que a sua preocupação fosse para além do seu cumprimento. Pelo contrário procurou-se ajustar a ação às diferentes situações que ocorrem durante a lecionação das aulas, as quais podiam ou não ter sido previstas. O desempenho dos alunos nas tarefas propostas e a motivação apresentada na realização das mesmas, as condições climatéricas adversas, as falhas de internet quando esta era necessária, foram alguns dos motivos que conduziram à tomada de decisões de ajustamento.

A elaboração de cada plano de aula teve sempre como referência o planeamento dos conteúdos a que se destinava. No entanto, quando eram lecionadas aulas sequenciais, na elaboração do plano tínhamos em conta um conjunto de acontecimentos ocorridos ao longo do processo ensino aprendizagem, nomeadamente se as ocorrências das aulas anteriores influenciavam ou não a elaboração do plano da aula seguinte. Por outro lado, o professor estagiário procurou implementar uma metodologia diversificada, adotando várias estratégias de forma a captar a atenção dos alunos durante a aula, mantê-los motivados para as tarefas solicitadas e motivá-los para o estudo de um tema específico. Apresentam-se na Tabela 3.4 algumas estratégias utilizadas na lecionação das aulas ao longo do ano letivo. Às estratégias apresentadas, juntam-se algumas aulas mais expositivas e de resolução de exercícios.

Como se pode observar na Tabela 3.4, tendo em conta as características da turma do 9.º ano, foram adotadas diversas estratégias fundamentalmente focadas nos alunos e, por vezes com pouco foco na exposição dos conteúdos porque se pensou que seriam mais adequadas ao perfil dos alunos. As orientações metodológicas gerais do Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007) salientam que a aprendizagem da Matemática decorre do trabalho realizado pelo aluno e estruturada por diferentes atividades criadas pelo professor para o apoiar na sua aprendizagem, proporcionando desta forma diversos tipos de experiências matemáticas. Tendo em conta que ensinar pressupõe uma procura de processos e métodos que permitam criar bons ambientes de aprendizagem e que a evolução social e tecnológica interfere diretamente com as motivações dos alunos exigindo uma permanente adaptação por parte do professor, foram utilizadas diversas ferramentas tecnológicas. Entre as ferramentas utilizadas importa-nos referir com mais pormenor a utilização da ferramenta Socrative no subcapítulo seguinte.

Tabela 3.4 – Estratégias utilizadas na lecionação das aulas ao longo do ano letivo

Estratégias	Domínios ou subdomínios	Turma
Proposta de tarefas que proporcionam a descoberta de conceitos matemáticos	Proporcionalidade direta Trigonometria	9.º ano
Tarefas de revisões com recurso ao Geogebra numa sala de computadores	Organização e tratamento de dados	9.º ano
Histórias da Matemática relacionada com algum conceito	Equações do segundo grau	9.º ano
Revisões de conteúdos de aulas anteriores com a utilização da ferramenta Plickers	Planos coordenados e coordenadas de pontos no espaço	10.º ano
Curiosidades matemáticas relativas a um conceito	Trigonometria no triângulo retângulo	9.º ano
Experiência com o Geogebra na sala de aula	Razões trigonométricas	9.º ano
Atividades de introdução de um conceito	Paridade de uma função	10.º ano
Exercícios de aplicação com a utilização do telemóvel e da ferramenta Socrative na sala de aula	Ângulos internos e externos de um polígono; Polígonos inscritos numa circunferência	9.º ano

Outra estratégia que nos importa referir é a inclusão da história da Matemática. Apesar do novo programa de Matemática do ensino básico de 2013 não fazer qualquer referência à história da Matemática, o programa de 2007 afirmava nas suas considerações gerais que os alunos devem ser capazes de: (i) reconhecer o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do homem através dos tempos e (ii) relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade. O mesmo programa salienta ainda que a história da Matemática pode evidenciar o desenvolvimento de determinadas ideias matemáticas, apresentando-a como uma ciência viva e em evolução, além disso evidencia o contributo de diversos povos e civilizações para o desenvolvimento desta ciência. Ao[1] olhar para a história da Matemática estamos a olhar para a própria Matemática e a sua história tem um papel muito relevante a desempenhar na melhoria do ensino da Matemática.

[1] Silva, J. C. A História da Matemática e o Ensino da Matemática. Departamento de Matemática. Universidade de Coimbra. Disponível em https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/histmatprogr1.html. Acesso em 28-03-2019.

Segundo Neves (2017) uma boa investigação relativamente à história que está por trás de alguns conteúdos, permite ao professor evitar o foco no manual e criar novas situações didáticas para as suas aulas. Saber[2] como, pouco a pouco, foram sendo construídos os conceitos e as notações matemáticas, serve também para compreender melhor certos erros que os alunos cometem e permitirá pôr em prática situações didáticas mais adequadas à aquisição progressiva de conceitos.

Muitos estudos revelam que o humor tem efeitos positivos na criação de bons ambientes de aprendizagem e no aumento da capacidade de concentração dos alunos (Menezes *et al.*, 2017). Outros estudos apontam também o uso de humor como contributo para aliviar a tensão no ensino de tópicos que habitualmente provocam nos alunos dificuldades e que são geradoras de ansiedade (Banas et al, 2011). Durante a prática pedagógica, ainda que de forma espontânea, o professor estagiário lecionou algumas aulas utilizando uma comunicação humorística e teatral que de alguma forma captou a atenção dos alunos.

3.3. A ferramenta Socrative

O Socrative é uma aplicação de elaboração de questionários, que pode ser usada numa sala de aula, em qualquer disciplina independentemente do ano de escolaridade, para recolher *feedback* imediato das aprendizagens dos alunos. Foi desenvolvida essencialmente para ser utilizada em contexto de avaliação formativa com o objetivo de proporcionar aos professores e alunos uma visão mais completa da evolução das aprendizagens relativamente a um determinado conteúdo. A ferramenta Socrative está disponível *online* para computadores e aplicações para Smartphones e Tablets, com duas versões, uma para o professor e outra para os alunos.

A ferramenta com acesso em https://socrative.com permite a aplicação de questionários em diferentes modalidades que podem ser do tipo teste, corrida espacial e pergunta rápida (Figura 3.7).

Figura 3.7 – Modalidades de aplicação de questionários na ferramenta Socrative

[2] Tradução adaptada para o português do artigo de Jean Paul Guichard – IREM de Lyon in Bouvier, A. (coord), Didactique des Mathèmatiques, Cedic/Nathan, 1986. Disponível em: http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mhist.html. Acesso em 28-03-2019.

Modalidade do tipo "teste"

Na modalidade do tipo "teste", o professor inicia o lançamento de um questionário seguindo três métodos de execução: **Feedback instantâneo** – Os alunos respondem as perguntas por ordem, não podem alterar as respostas e recebem, caso seja permitido pelo professor, um *feedback* correto/errado e uma explicação imediata após responder cada uma das questões. **Navegação aberta** - Os alunos realizam o questionário, podendo saltar a ordem das questões, editar as suas respostas e navegar no questionário a seu próprio ritmo até completar e submeter para avaliação. **Controlo do professor** – O professor propõe uma questão de cada vez e os alunos respondem ao ritmo do professor.

Em qualquer uma das formas de executar um questionário do tipo teste (Figura 3.8), o professor pode optar por selecionar ou não, caso seja permitido pela ferramenta, algumas configurações adicionais: (i) exigir que os alunos indicam o nome antes de começar por responder as questões; (ii) lançar as perguntas de forma aleatória, permitindo que diferentes alunos iniciem a resolução de diferentes questões e evitando que os alunos copiem; (iii) as opções de respostas aparecem de forma aleatória; (iv) mostrar o *feedback* das questões; (v) mostrar o resultado final em percentagem e (vi) os alunos apenas realizam o teste uma única vez (uma tentativa), isto é, depois de terminar, não pode repetir o teste novamente e se um aluno sair da sala antes de terminar o teste terá a oportunidade de poder continuar o seu teste de onde parou.

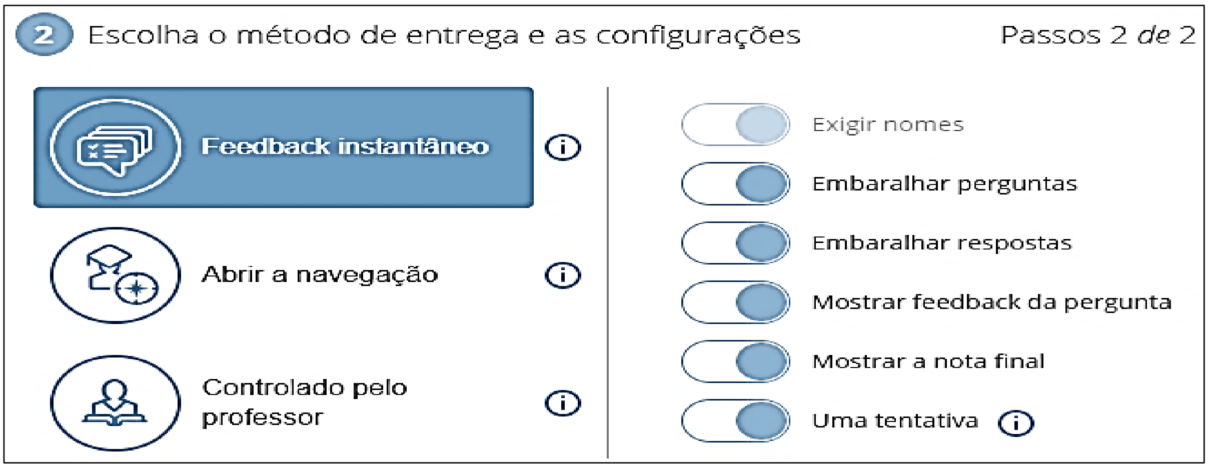


Figura 3.8 – Métodos de execução de um questionário do tipo teste no Socrative

Modalidade do tipo "corrida espacial"

A modalidade do tipo "corrida espacial" permite realizar questionários em formato de jogo, onde os alunos visualizam através de um projetor a sua posição na «corrida» à medida que vão respondendo as questões. Tendo em conta que o jogo gera grande motivação nos alunos, esta modalidade pode permitir um grande envolvimento dos alunos que poderão se organizar a pares ou em pequenos grupos para a resolução de um determinado conjunto de questões propostas. Nesta modalidade os grupos são obrigados a responder corretamente às questões propostas, caso queiram chegar à meta em primeiro lugar. Este processo pode ser bastante interessante para que se consiga que muitos alunos resolvam as questões propostas, estejam muito concentrados e atentos na sua resolução, sendo também útil no final para a discussão em grande grupo sobre os erros cometidos. O jogo pode repetir-se, com outras questões e as vezes que se achar conveniente, como atividade aliciante e promotora das aprendizagens dos alunos.

Neste formato o professor deverá indicar o número de equipas até o máximo de 20 equipas, indicar ou não o tempo de duração do jogo, decidir por formar os grupos ou deixar os alunos escolherem as suas próprias equipas ou então permitir que a ferramenta forma os grupos automaticamente. Se o professor optar por formar os grupos automaticamente e houver mais alunos do que o número de equipas o Socrative divide-os igualmente pelas equipas. Os alunos poderão (i) jogar individualmente nos seus próprios computadores ou dispositivos móveis; (ii) jogar em grupos compartilhando um único computador ou dispositivo móvel ou ainda (iii) jogar na mesma equipa, mas cada um joga no seu computador ou dispositivo móvel.

Modalidade do tipo "pergunta rápida"

Esta modalidade tem como objetivo o lançamento de uma pergunta rápida durante a aula e que poderá ser de escolha múltipla, verdadeiro/falso ou resposta curta (com possibilidade de votações). Nas perguntas rápidas o professor propõe uma pergunta no quadro ou através do retroprojetor ou ainda uma pergunta do livro e os alunos respondem através do dispositivo móvel. Numa pergunta rápida e de resposta curta os alunos podem digitar uma resposta que consideram ser correta. Entre as respostas dadas pelos alunos, o professor pode escolher algumas respostas e a turma vota nas respostas de acordo com o critério definido pelo professor. Por exemplo, o professor poderá fazer com que os seus alunos votem na resposta que consideram mais rigorosa e completa ou incorreta. Os resultados dos votos aparecerão na ferramenta do professor. Esta modalidade é útil, por exemplo, para testar o que os alunos aprenderam na aula.

Tabela de resultados

Em qualquer das modalidades, à medida que os alunos respondem às questões é possível observar de imediato as respostas corretas e erradas dos alunos, a percentagem de acertos de cada um dos alunos, o número de respostas corretas, a percentagem de questões que o aluno já respondeu e a percentagem dos alunos da turma que acertaram em cada uma das questões propostas. O professor pode aceder sempre que for necessário à tabela de resultados disponível no Socrative após terminar um questionário. A Figura 3.9 ilustra uma possível tabela que surge durante a realização de um questionário.

A ferramenta fornece várias opções para a elaboração dos questionários. É possível elaborar questionários com muitas questões que podem ser de escolha múltipla, verdadeiro/falso ou de resposta curta, inserir imagens em cada questão, introduzir textos com algumas possibilidades de escrita, por exemplo, x^2 ou x_2, mas ainda não dispõe de outros caracteres matemáticos, a colocação da resposta à pergunta, bem como a explicação escrita adicional com algumas etapas de resolução da questão proposta. A explicação adicional é um fator importante no apoio à aprendizagem independente dos alunos, quer na sala de aula ou em casa podem seguir o seu próprio ritmo de trabalho, observando o *feedback* imediato relativo às suas respostas.

Nome ↑	Nota (%)	1	2	3	4	5	6
*****	17%	Falso	C	B	D	95°	C
*****	100%	Falso	B	C	B	110	D
*****	83%	Falso	B	C	B	60	D
*****	67%	Verdadei	B	C	B	190	D
*****	33%	Falso	A	C	C	80	A
Total da turma		**80%**	**60%**	**80%**	**60%**	**20%**	**60%**

Figura 3.9 – Tabela de resultados de um questionário no Socrative

Uma das grandes vantagens que o Socrative possui consiste na obtenção dos relatórios após a realização de um questionário. A ferramenta fornece três tipos de relatórios: um PDF individual, um PDF da turma e uma grelha em Excel com os resultados de toda a turma. O PDF individual apresenta os resultados individuais de cada aluno e a correção do questionário com a atribuição de uma percentagem entre 0 e 100%, facilitando assim o trabalho do professor que, imediatamente a seguir à realização dos questionários, tem acesso à sua correção e classificação, podendo inclusive partilhar com os alunos e fornecer um rápido *feedback*. O PDF da turma permite que o professor tenha uma visão global do número de alunos que acertou/errou cada questão do questionário, percebendo a panorâmica geral conseguida pela turma. A folha do Excel apresenta toda a informação discriminada que se obtém quer no PDF individual quer no PDF da turma.

No 3.º período foi utilizada a ferramenta Socrative com os alunos do 9.º ano pelo professor estagiário numa das aulas assistidas e várias vezes pela professora titular da turma, enquanto estudavam a temática da circunferência. Todas as questões foram elaboradas pelo professor estagiário e discutida com a professora titular. As questões foram propostas durante a aula em grupos de dois elementos ou de forma individual com o objetivo de rever os conteúdos trabalhados e também como trabalho de casa.

Para além das aulas previstas, cujo desenvolvimento será apresentado nos tópicos 3.5.1, 3.6.2 e 3.7.2, o professor estagiário lecionou, em parceria com a professora titular da turma, mais três aulas de 50 minutos, as quais envolveram a utilização da ferramenta Socrative. Nestas aulas, nos períodos relativos à resolução de exercícios de aplicação, os professores organizaram os alunos em grupos e propuseram a resolução de um questionário do tipo “corrida espacial”. Os grupos foram constituídos por dois elementos e formados maioritariamente de acordo com a posição nas mesas. De modo a que o trabalho de grupo pudesse ser eficaz, foram feitas pequenas alterações de modo a que os pares pudessem sentir-se mais à vontade para trabalharem em conjunto. Assim, foram alterados dois pares e um dos alunos trabalhou sozinho porque durante o ano letivo, em algumas atividades que foram propostas, não manifestou interesse em trabalhar com os colegas e os mesmos não quiseram trabalhar com ele. Inicialmente, começou-se por identificar cada um dos pares por uma cor representativa do grupo e foram esclarecidos alguns pormenores sobre a forma como os alunos deveriam responder às questões. As questões foram de escolha múltipla, verdadeiro / falso e de resposta curta que permitiram averiguar o nível de compreensão dos alunos relativamente aos conteúdos trabalhados, sendo que, os alunos podiam responder uma questão de cada vez sem a possibilidade de alterarem as respostas. Os pares trabalharam cada um com o seu telemóvel, mas no mesmo grupo, foram sensibilizados a resolveram os exercícios no caderno, a discutirem entre pares algumas estratégias de resolução, a confrontarem os resultados obtidos e por fim colocarem as suas respostas na ferramenta.

Após a autorização do professor os alunos começaram a responder rapidamente às questões, sendo que não podiam errar as questões caso pretendessem chegar à meta em primeiro lugar. À medida que respondiam às questões os professores circulavam pela sala para tirar algumas dúvidas e cada um dos pares observava a sua posição na “corrida” e as respetivas “ultrapassagens” no projetor da sala (Figura 3.10).

Figura 3.10 – Sala de aula onde se está a usar a ferramenta Socrative

É importante destacar a forma com os alunos encararam a aula e os trabalhos de casa com a utilização desta ferramenta. Um dos aspetos mais interessantes foi a forma como se empenharam na resolução e discussão dos exercícios propostos na ferramenta, com uma concentração muito maior do que habitual. Havia alunos que normalmente não trabalhavam quando eram propostos exercícios na forma habitual. Nas aulas em que se utilizou o Socrative esses alunos mudaram radicalmente o trabalho em aula e houve um aumento do número de alunos que realizavam o trabalho de casa.

Despertar o interesse dos alunos não é uma tarefa fácil sobretudo quando as aulas se desenvolvem de forma mais expositiva e com recurso apenas ao quadro. Urge aos professores modificarem a sua prática em função do cotidiano dos seus alunos, focando-se em novas estratégias que propiciem melhores aprendizagens e tornem os alunos participantes ativos, ao invés de assumirem a posição de recetores de informações. No entanto, não podemos deixar de questionar o interesse dos alunos perante as novidades que o professor traz para a sala de aula. A utilização da ferramenta foi algo novo e que inicialmente despertou muito interesse nos alunos, mas até quando estariam interessados e motivados? O interesse dos alunos pode ser uma coisa passageira, por isso, cabe ao professor diversificar as suas estratégias e evitar que a monotonia interfira na motivação dos seus alunos.

3.4. Aulas assistidas

Durante o ano letivo 2018-2019 o professor estagiário acompanhou a professora orientadora do estágio no exercício das suas funções, observando as suas aulas nas turmas dos 9.º, 10.º e 12.º anos. Por questões de uniformidade entre todos os estagiários e atendendo às diferenças das cargas letivas das turmas dos diferentes anos, ficou decidido que todos os estagiários deviam desenvolver a sua atividade num total de 8 tempos letivos semanais distribuídos entre a turma de estágio, que era acompanhada em todos os tempos letivos, e uma turma do outro ciclo de ensino. Atendendo a que a turma, onde se desenvolveu o estágio pedagógico, tinha uma carga letiva de 5 tempos semanais, os outros 3 tempos foram utilizados no acompanhamento a duas turmas do ensino secundário. Neste sentido o estagiário assistiu a cinco dos seis tempos disponíveis no horário do 9.º ano (turma de estágio), dois tempos na turma do 10.º ano e um tempo na turma do 12.º ano. Tendo em conta que a oferta complementar (OC) no 9.º ano tinha a duração de um semestre, o professor estagiário assistiu a todas as aulas e, sempre que as atividades o justificavam necessárias, assistiu também a algumas aulas à terça-feira nas turmas dos 9.º e 12.º anos. Na Tabela 3.5 apresenta-se o horário das aulas assistidas pelo professor estagiário ao longo do ano letivo.

Tabela 3.5 – Horário semanal, com a indicação das aulas assistidas pelo professor estagiário.

	Segunda	**Terça**	**Quarta**	**Quinta**	**Sexta**
8:15 – 9:05		9.º ano		12.º ano	
9:15 – 10:05		12.º ano		12.º ano	
10:20 – 11:10	**10.º ano**	12.º ano			**12.º ano**
11:20 – 12:10	**10.º ano**		12.º ano	10.º ano	**9.º ano**
12:20 – 13:10			12.º ano	10.º ano	**9.º ano**
13:15 – 14:05	**9.º ano**				
14:15 – 15:05	**9.º ano**				
15:15 – 16:05	**9.º ano (OC)**	10.º ano			
16:20 – 17:10		10.º ano			
17:20 – 18:10					

As aulas assistidas da orientadora pedagógica permitiram observar as dinâmicas da professora e dos alunos, assim como, analisar como se desenrola o grande desafio de dar aulas. Foi possível observar toda a metodologia de ensino aplicada e aprender diversos pormenores relativamente à implementação dos programas de Matemática dos diferentes anos de escolaridade, os quais, por certo, irão ser bastante úteis enquanto futuro professor. Algumas estratégias, relativamente à forma como a professora se referia a alguns conceitos, fruto da sua longa experiência de ensino, irão ser úteis pois permitirão auxiliar da melhor forma os alunos na compreensão de determinados conceitos. Uma das grandes aprendizagens na observação das aulas diz respeito ao cuidado e rigor da professora orientadora na exposição dos conteúdos aos alunos, utilizando de forma correta as definições e as notações, aspetos bastante relevantes no ensino da disciplina. Algumas vezes foi também necessária alguma discussão com a professora orientadora sobre alguns aspetos que ficaram menos claro para o professor estagiário relativamente às estratégias utilizadas na apresentação de alguns conteúdos.

Quanto à exposição e explicação dos conteúdos, constatei que a professora tendencialmente, alerta aos alunos para determinados aspetos que, de acordo com a sua experiência, os alunos costumam cometer erros “grosseiros”. No entanto, com alguma frequência foram os alunos que solicitaram à professora que repetisse algum conteúdo quando uma explicação não foi clara para eles ou devido a falta de atenção; certo é, que é importante que os alunos se sintam à vontade para esclarecer as suas dúvidas quando estas persistem após a explicação dos conteúdos, porém quando tal acontece derivado a falta de atenção por distração é prejudicial para o andamento normal das aulas, atrasando a planificação prevista para a mesma. Neste sentido, importa referir também algumas perguntas fora do contexto, reveladoras de ausência de conhecimentos e dificuldades na compreensão do que é explanado, contrariamente aos tipos de perguntas acima mencionadas, isto é, (fora de contexto), muitas vezes, foram feitas perguntas bastantes pertinentes, que apelam a uma boa preparação prévia do professor.

As aulas assistidas permitiram observar, principalmente na turma do 9.º ano, alguns comportamentos e atitudes dos alunos no que se refere à resistência de alguns em passar os conteúdos para o caderno diário e na resolução de algumas tarefas propostas, às conversas paralelas e piadas, atirar objetos uns aos outros enquanto a professora está a escrever no quadro, aos alunos encolhidos nas mesas parecendo que estão a dormir, aos auriculares nos ouvidos durante as aulas, à discussão dos alunos com a professora tentando defender as suas opiniões, enfim uma série de comportamentos que revelavam falta de interesse e que permitiram ao professor estagiário ter uma noção da realidade de algumas salas de aula e ao desafio de lecionar uma turma bastante difícil como foi o caso do 9.º ano. Perante essas posturas dos alunos na sala de aula foi possível comprovar a capacidade da professora em contornar a situação, mudando alguns alunos dos seus lugares habituais, algumas vezes procedendo a um castigo máximo (expulsão da sala) ou mencionando uma possível expulsão da sala, dialogando com os alunos sobre o papel dos alunos e do professor em sala de aula e que, sem uma mútua colaboração, não haveria estratégia que pudesse ser eficaz no desenvolvimentos das aprendizagens.

Para além das aprendizagens aferidas pela observação das aulas, o professor estagiário colaborou na dinâmica das aulas, proporcionando algum auxílio aos alunos nos períodos de resolução de exercícios, nomeadamente no esclarecimento das suas dúvidas. Mas também assumia o papel da professora titular em alguns momentos, abordando individualmente os alunos para os incentivar a passarem os conteúdos para o caderno diário e a permaneceram em silêncio enquanto a professora expunha os conteúdos, bem como a efetuarem os trabalhos propostos. A colaboração na dinâmica da aula proporcionou o desenvolvimento de uma boa relação com os alunos, a familiaridade com as dificuldades e motivações dos mesmos, bem como identificar os seus hábitos de trabalho, aspetos que o professor estagiário considera de extrema importância no desempenho das funções de um professor.

3.5. A turma do 9.º ano

3.5.1. Aulas lecionadas

O professor estagiário lecionou um total de oito aulas na turma do 9.º ano das quais três no primeiro período, quatro no segundo período e uma no terceiro período. As aulas lecionadas nesta turma correspondem a 14 tempos letivos de 50 minutos. Foi também lecionada pelo professor estagiário uma aula informal, sem qualquer planificação e supervisão, a qual se tratou de uma aula de correção do teste de avaliação. Esta sessão ocorreu na ausência da professora titular da turma e foi uma boa oportunidade para perceber um pouco a dinâmica de estar isolado com a turma. Na Tabela 3.6 apresentam-se a calendarização das aulas lecionadas na turma do 9.º ano com a indicação das datas, os temas trabalhados e as professoras que as supervisionaram.

Antes de cada aula lecionada foi elaborada uma planificação e apresentada à professora orientadora de modo a analisar e efetuar alguns comentários que considerasse pertinentes. Após cada um dos tempos lecionado, as professoras efetuaram algumas críticas sobre a forma como o professor estagiário dirigiu a aula. As análises das professoras permitiram uma reflexão sobre os aspetos positivos e negativos, pelos quais pudesse refletir sobre novas estratégias e pensar em como melhorar da próxima vez.

Apresentam-se de seguida o que foi feito nas planificações das aulas, como foram executadas e uma análise crítica da forma como decorreram. As aulas do segundo período (n.º 4 a n.º 7) foram lecionadas sequencialmente.

Tabela 3.6 – Calendarização da prática pedagógica supervisionada na turma do 9.º ano

	Data	Duração	Domínio	Subdomínio	Supervisão
1.º Período	02/11/2018	100 minutos	FSS9 - Funções Sequências e Sucessões	Proporcionalidade Inversa	Prof. R. L.
	05/11/2018	100 minutos	OTD7, 8, 9 Estatística	Medidas Estatísticas, Tabelas e Gráficos	Prof. R. L.
	30/11/2018	100 minutos	ALG8, 9 Álgebra	Equações do 2.º grau	Prof. R. L. Prof. D. ª M. H. S.
2.º Período	12/02/2019	50 minutos	GM9 Geometria e Medida	Trigonometria	Prof. R.L. Prof. D. ª M. H. S.
	18/02/2019	100 minutos	GM9 Geometria e Medida	Trigonometria	Prof. R. L. Prof. D. ª M. H. S.
	19/02/2019	50 minutos	GM9 Geometria e Medida	Trigonometria	Prof. R. L. Prof. D. ª M. H. S.
	22/02/2019	100 minutos	GM9 Geometria e Medida	Trigonometria	Prof. R. L. Prof. D. ª M. H. S.
3.º Período	20/05/2019	100 minutos	GM9 Geometria e Medida	Circunferência	Prof. R. L. Prof. D. ª M. H. S.

Prof. R. L. – Professora Rorário Lopes; Prof. D. ª M. H. S. – Professora Doutora Maria Helena Santos

3.5.1.1. Aula n.º 1

Planificação da aula

Ao preparar esta aula a preocupação consistiu em proporcionar aos alunos um momento diversificado de aprendizagem, através da realização de um trabalho de grupo em substituição do trabalho individual, que é o método mais frequente. Optou-se pela proposta da realização de uma tarefa a pares com o objetivo de proporcionar aos alunos a descoberta de alguns conceitos relacionados com o conceito de proporcionalidade inversa, promover a interação, entreajuda, partilha de ideias entre os alunos, procurando garantir um maior sucesso na execução da mesma.

A tarefa estava relacionada com o aluguer por 60 euros de um campo de futebol de relva sintética por um grupo de amigos para realizar um torneio de futebol. Foi proposta esta tarefa, por um lado, porque envolve uma situação de contexto real com o objetivo de motivar os alunos para a sua realização, por outro lado, para introduzir o conceito de proporcionalidade inversa.

O principal propósito das questões propostas na tarefa, era que os alunos: (i) se apercebessem que alteração provocaria no preço do aluguer do campo de futebol resultante do aumento/diminuição do número de pessoas e vice-versa; (ii) chegassem à conclusão qual a relação existente entre as duas grandezas em causa (n.º de pessoas (x) e valor pago por pessoa (y)); (iii) verificassem que as duas grandezas envolvem o produto constante dos valores correspondentes, que neste caso é sempre igual a 60 (preço do aluguer do campo de futebol); (iv) certificassem que a expressão que relaciona as duas grandezas pode ser usada para determinar qualquer valor de uma das grandezas sabendo *à priori* o valor da outra grandeza e (v) compreendessem a diferença entre proporcionalidade direta e inversa.

No início da aula o professor começou por explicitar de forma breve em que consistirá a aula, tecendo algumas considerações sobre a realização da tarefa. Após os alunos iniciaram os trabalhos a pares, seguida de apresentação de alguns trabalhos e por fim a discussão em grande grupo sobre a resolução dos alunos. No seguimento da realização da tarefa o professor com recurso ao PowerPoint definiu com mais clareza os conceitos relacionados à proporcionalidade inversa e no final da aula propôs aos alunos alguns exercícios de consolidação como TPC.

Execução da aula

Tal como descrito anteriormente o professor estagiário iniciou a aula com uma breve introdução referindo o conceito que seria abordado na aula, tendo feito algumas considerações sobre a realização da tarefa. O professor estagiário teve o cuidado de pedir aos alunos que registassem e justificassem todas as respostas na folha do enunciado e estas deveriam ser o mais completas possível.

O início da aula foi um pouco ruidoso, no entanto, a realização da tarefa iniciou-se a um excelente ritmo, com os grupos a mostrarem muito interesse na sua realização. Foi possível notar que todos estiveram empenhados durante a realização dos trabalhos, uma vez que muitos dos alunos solicitaram esclarecimentos para as suas dúvidas e trabalharam em silêncio, por isso, a aula foi produtiva. O professor durante o esclarecimento de dúvidas procurou intervir de forma ligeira e discreta nos trabalhos dos mesmos. Inicialmente as dúvidas colocadas pelos alunos incidiam no facto de muitos recorrerem à noção de proporcionalidade direta (que haviam trabalhado até então) para preencher um quadro em que as duas grandezas eram inversamente proporcionais, mas posteriormente a maioria dos pares acabaram por refletir sobre as suas respostas e perceber que estariam perante uma situação diferente e esta descoberta possibilitou a correção do exercício, a qual, muitos acabaram por responder corretamente.

Após o tempo estipulado para a realização da tarefa o professor solicitou a dois grupos para replicarem as suas resoluções no quadro. Estes foram selecionados previamente durante a realização dos trabalhos por terem conseguido resolver total ou parcialmente a tarefa de acordo com os objetivos. Optou-se por dar preferência aos grupos que apresentaram respostas mais elaboradas. Um dos alunos que foi ao quadro apresentou a resposta bastante elaborada para grande satisfação do professor estagiário e da professora titular da turma, pois tratava-se de um aluno que revelava algumas dificuldades.

Após a discussão da tarefa o professor definiu o conceito de proporcionalidade inversa, começando com um exemplo que serviria também como reforço do conteúdo trabalhado durante a realização da tarefa. O exemplo envolvia a velocidade e a distância percorrida por uma família que foi passar um fim de semana para a sua casa de campo. Recorrendo a uma tabela com alguns valores da duração da viagem em horas, em função da velocidade média, em km/h, pretendeu-se que os alunos compreendessem que, ao multiplicar a velocidade média por um número positivo, a duração da viagem ficava multiplicada pelo inverso desse número. Quando isto acontece, diz-se que as grandezas são inversamente proporcionais. O exemplo também consistia em fazer os alunos notarem que o produto da velocidade média pela duração da viagem era sempre constante e igual a 90 km, que correspondia à distância percorrida e que designamos por constante de proporcionalidade inversa. A aula terminou com algumas propostas de exercícios para trabalho de casa.

Análise após a aula

No final da aula foi feita uma análise da forma como esta decorreu, refletindo sobre alguns comentários que a professora titular da turma teceu relativamente à forma como o professor estagiário conduziu a realização da tarefa e a sua prestação nos restantes momentos da aula.

Durante a realização da tarefa verificou-se que alguns alunos estavam a falar num tom elevado no início da aula a qual o professor estagiário deveria ter chamado atenção pois estavam a perturbar o bom funcionamento da aula. No decorrer da realização da tarefa alguns pares de alunos não estavam a trabalhar devidamente, pelo que seria necessário impor aos alunos um maior ritmo de trabalho. O estagiário demorou imenso tempo na correção de um dos exercícios da tarefa onde os alunos tinham de responder o que acontece a uma das grandezas se a segunda aumentar/diminuir e se duplicar/triplicar. Neste exercício faltou frisar que um aumento (respetivamente diminuição) de uma das grandezas provocava uma diminuição (respetivamente aumento) da outra grandeza, mas sempre na razão inversa.

Num outro momento da aula, quando o professor estagiário deu um exemplo de introdução do conceito, também cometeu algumas inconveniências que a professora titular viria a chamar atenção. Foi apresentado através dos slides um exemplo resolvido. Seria melhor se o professor tivesse solicitado aos alunos a resolução porque permitia ter uma noção de como os alunos pensam, bem como, proporcionar aos mesmos uma melhor compreensão do conceito quando são eles mesmos autores da sua própria aprendizagem. Também deveria ter reforçado mais que numa relação de proporcionalidade inversa entre duas grandezas multiplicar uma das grandezas por um número positivo corresponde a multiplicar a outra pelo inverso desse número.

Relativamente à constante de proporcionalidade inversa, o professor estagiário explicou que o significado da constante seria que em 1h a família percorria 90 km/h e não deveria ter sido explicado dessa forma. A professora titular frisou que se fizesse o percurso a uma velocidade média de 90 km/h a duração da viagem seria 1 hora e não era o que faria mais sentido neste caso. Em primeiro lugar não era 90 km/h, mas sim apenas 90 km, em segundo lugar o significado seria a distância percorrida durante a viagem. Por outro lado, ao explicar como se obtém a constante de proporcionalidade inversa realçando o facto de ser única, contrariamente às relações de proporcionalidade direta em que existiam sempre duas constantes, conforme se dividia x por y ou y por x, o professor estagiário apenas escreveu no quadro as expressões y/x e x/y o que poderá ter deixado os alunos um pouco confusos, pelo que deveria ter insistido mais nesta questão. Poderia ter escrito a relação de proporcionalidade direta e tentar esclarecer um pouco mais de modo a não deixar os alunos com dúvidas, embora no momento o professor estagiário não se tenha apercebido dessas dúvidas.

No plano de aula consta que o professor deveria frisar que os alunos não devem concluir que sempre que uma grandeza aumenta a outra diminui se tem uma situação de proporcionalidade inversa. Assim, deveria ter chamado mais a atenção dos alunos para este facto, frisando que existem relações entre grandezas em que o aumento dos valores de uma é acompanhado pela diminuição dos valores da outra e, no entanto, não existe relação de proporcionalidade inversa. Outro aspeto que o professor pretendia chamar atenção aos alunos era sobre a utilização errada da regra de três simples apenas usada em situações de proporcionalidade direta, mas a professora titular referiu que não seria aconselhável falar no termo «regra de três simples», pois os alunos muitas vezes captam a informação de forma parcial e, sendo uma regra que os alunos gostam de usar, podiam assimilar a informação de forma incorreta, mesmo tendo o professor alertado sobre isso, pelo que, optou-se por não falar no assunto.

Outras decisões que deveriam ter sido tomadas prendeu-se com a recolha do enunciado das resoluções dos alunos antes da correção para que não tivessem oportunidade de copiar, mas a professora titular, quando percebeu, sugeriu que recolhesse as respostas *à priori*. No que respeita à escrita dos conteúdos teóricos no quadro para que os alunos pudessem passar para o caderno diário, o professor estagiário não o fez, em vez disso solicitou que um dos alunos lesse as definições através dos slides, o que também foi uma estratégia adequada, no entanto, devia ter imposto a obrigação dos alunos copiarem as definições para o caderno.

A forma como o professor pronuncia algumas palavras é um dos cuidados que o professor titular deverá ter em atenção pois, no caso particular desta aula, uma dessas situações traduziu-se num dos momentos menos bom durante a aula, com alguns alunos a usarem esse facto para comentar e perturbar a aula. Na discussão da tarefa inicial o professor estagiário pronunciou mal a palavra aluguer, dizendo "alúguer" em vez da pronunciação correta. Um dos alunos percebeu isso e começou a comentar com outros colegas sobre o assunto e a fazer risotas. O professor estagiário não se apercebeu do que tinha sucedido, mas a professora titular da turma percebeu e mandou o aluno sair da sala de aula porque, após uma primeira chamada de atenção, o aluno continuou com os comentários e a professora titular considerou a atitude do aluno um desrespeito pelo professor.

Na resolução da tarefa, o professor considera que fez bem em ter circulado pela sala para mais facilmente identificar as dificuldades reveladas pelos alunos e sem interferir na resolução da mesma com os esclarecimentos prestados. No entanto, deveria ter imposto aos alunos um ritmo diferente de trabalho, de modo a melhorar a prestação dos mesmos durante a realização da tarefa, chamando mais à atenção de alguns alunos que estavam a conversar perturbando o bom funcionamento da aula.

O professor, durante a aula, sentiu que houve alguns momentos em que a explicação dos conteúdos não foi muito clara, não insistindo em algumas questões científicas. No entanto, a metodologia utilizada com a realização da tarefa revelou-se adequada, tendo os alunos reagido bastante bem. No início o professor tinha receio de que os alunos pudessem não reagir bem à tarefa proposta porque a turma, nas aulas anteriores a que o professor estagiário assistiu, revelou ter muitas dificuldades na disciplina de Matemática, um pouco também resultante da má prestação que tiveram no 8.º ano. A reação deles foi surpreendente para grande satisfação do professor estagiário e da professora titular. Reação essa que veio a confirmar-se através da correção da tarefa, com apenas dois grupos a revelarem resultados menos positivos.

Os comentários da professora titular foram bastantes úteis e proporcionaram ao professor estagiário uma reflexão sobre as dificuldades que os alunos apresentaram na compreensão dos conceitos, que o professor não identificou, pelo que, não pode esclarecer devidamente. Permitiu ainda, refletir sobre a estratégia de ensino utilizada, a fim de melhorar a abordagem num futuro contacto com o tema e em futuras aulas.

3.5.1.2. Aula n.º 2

Planificação da aula

Tendo em conta que os alunos acompanham a evolução da sociedade em todas as suas vertentes, procurou-se planificar a aula proporcionando aos mesmos um ensino e aprendizagem dinâmico com o uso do *software* Geogebra[3]. Com a preparação desta aula o professor pretendia proporcionar aos alunos a revisão e consolidação dos conceitos de estatística dos 7.º, 8.º e 9.º anos, nomeadamente as medidas de localização, as medidas de dispersão, a construção de tabela de frequências, gráfico de barras, diagrama de caule e folhas e histogramas de uma forma dinâmica. Tendo em conta que os alunos obtinham estas medidas estatísticas e os gráficos à mão, o professor pensou que seria interessante os alunos perceberem a utilidade do *software* Geogebra e que este permitia obter as medidas e os gráficos de uma forma bastante diferente daquilo a que estavam habituados, sobretudo quando a dimensão da amostra é elevado, o que seria bastante trabalhoso

[3] O Geogebra é um *software* de geometria dinâmica, gratuito e acessível aos alunos do 3.º ciclo do ensino básico e ensino secundário, o qual lhes permite procurar uma nova forma de trabalhar os conteúdos de geometria e estatística.

efetuarem os cálculos à mão. Procurava-se também com o auxílio da tarefa proposta que os alunos se familiarizassem com as ferramentas que o Geogebra disponibiliza para o estudo da estatística.

Execução da aula

A aula decorreu numa sala de computadores da biblioteca. O momento inicial da aula destinou-se à distribuição dos alunos pela sala em grupos de dois e uma breve apresentação da tarefa e do *software* Geogebra. Importa referir que o professor estagiário ficou surpreso, pelos alunos terem afirmado que seria o primeiro contacto deles com o Geogebra. O que me fez refletir sobre as possíveis razões para a diminuta aposta dos professores dos anos anteriores relativamente ao uso de *softwares* dinâmicos na sala de aula, em particular do *software* Geogebra.

Cada uma das questões da tarefa proposta continha instruções de modo a facilitar o uso dos comandos adequados no Geogebra. Apesar das instruções, durante a realização da tarefa, os alunos revelaram bastantes dúvidas acerca do que deveriam fazer. Constantemente perguntavam ao professor estagiário e à professora titular o que deveriam fazer em quase todas as questões propostas no enunciado. O que fez pensar que os alunos simplesmente não liam as instruções no enunciado que eram bastantes fáceis e que à partida o professor pensou que não teriam dificuldades. Mesmo tendo sido o primeiro contacto deles com o Geogebra, as instruções eram bastante claras e a única coisa que teriam que fazer era introduzir os comandos referidos no enunciado na linha de comandos do Geogebra para obter o que era pedido. Devido às perguntas sucessivas dos alunos a realização da tarefa foi mais lenta do que o esperado, pois havia alguns pares que estavam à espera dos professores para colocar questões e não produziram muito trabalho.

Além do referido notou-se que alguns grupos obtinham os resultados, mas não passavam para a folha do enunciado. A professora orientadora sugeriu que os alunos enviassem as resoluções por email, algo que o professor estagiário não tinha pensado. Apesar do anunciado conter perguntas que só poderiam ser respondidas na folha do enunciado, o envio do ficheiro era importante, porque permitia ao professor visualizar o trabalho dos alunos sobretudo a construção dos gráficos, a obtenção das tabelas de frequências, o diagrama de caule folhas e o diagrama de extremos e quartis.

É importante salientar que poderia ter sido melhor a forma como o professor estagiário pensou o desenvolvimento desta aula. Apesar das tecnologias terem alguma influência na motivação dos alunos é necessário pensar bem na sua execução, de modo a tirar melhor partido delas e proporcionar aos alunos um verdadeiro momento de aprendizagem. Esse aspeto mereceu uma boa intervenção da professora orientadora, tendo o professor estagiário concordado plenamente. A professora orientadora salientou que poderia ter pensado em executar a aula em dois momentos: em primeiro lugar os alunos podiam resolver a tarefa em papel na sala de aula e num segundo momento dirigiam-se à sala de computadores para validar as respostas que obtiveram previamente. Dessa forma os alunos iriam refletir mais sobre os erros que eventualmente cometeram, bem como corrigir os mesmos. Esta metodologia seria a melhor pois os alunos não se limitavam apenas a introduzir os comandos no

Geogebra e obter os resultados, mas teriam uma oportunidade de confrontar as suas respostas com as do *software* e desta forma a aprendizagem seria mais eficaz.

Análise após a aula

Após o final da aula o professor estagiário apercebeu-se que a tarefa tinha sido demasiado extensa, apesar de existirem instruções que os alunos teriam de seguir. Além disso, o facto de ser o primeiro contacto dos alunos com o Geogebra, o baixo ritmo de trabalho dos alunos, as dificuldades em ler e seguir as instruções do enunciado foram aspetos que influenciaram a forma como a aula decorreu e fez com que os alunos não aderissem à aula tanto quanto seria esperado.

Analisando as produções dos alunos recolhidas no final da aula, constatou-se que muitos dos alunos não responderam às questões propostas no enunciado. Apesar da professora orientadora ter sugerido, durante a aula, o envio por email dos trabalhos feitos, teria sido melhor incluir na planificação da aula que os alunos teriam que enviar os ficheiros com as construções feitas no Geogebra. No entanto, houve alguns pares de alunos que resolveram quase a totalidade da tarefa e alguns, que fizeram algumas construções, mas não responderam às questões do enunciado.

Outro aspeto importante e que podia ter sido evitado foi o facto do professor estagiário não ter discutido com antecedência todas as metodologias de execução desta aula com a professora orientadora. A mesma referiu que possivelmente teria sugerido ao professor estagiário a planificação da aula em dois momentos: (i) a resolução da tarefa na sala de aula e posteriormente (ii) a verificação dos resultados na sala de computadores. O professor estagiário concordou que esta estratégia teria sido melhor do que aquela que foi implementada e com certeza teria sido adotada, pois possibilitaria uma melhor adesão dos alunos e maior eficácia em atingir os objetivos predefinidos para esta aula.

Outra ausência notada no plano de aula foi os conteúdos teóricos. A professora titular afirmou que apesar de ser uma aula de revisão dos conceitos, deveria ter incluído no plano os conteúdos teóricos que servem de base aos conceitos revistos. O professor estagiário consciencializou que um plano de aula deve incluir sempre alguma referência aos conteúdos teóricos que serão abordados na aula independentemente desta ser ou não uma aula de revisões.

Embora a aula não tenha corrido tão bem como o professor tinha planeado, fora útil para a sua aprendizagem. A reflexão sobre algumas opções metodológicas que deveriam ter sido adotadas e os comentários da professora orientadora serviram de exemplo para uma melhor abordagem estratégica no futuro.

3.5.1.3. Aula n.º 3

Planificação da aula

Na preparação desta aula o professor estagiário delineou a sua estratégia de execução da aula solicitando sempre que possível a opinião da professora titular da turma de modo a que a aula pudesse decorrer da melhor forma possível. Antes da aula o professor definiu e discutiu com a professora titular os pontos mais importantes da aula: (i) apresentar uma breve história das equações do 2.º grau; (ii) recordar as equações do 2.º grau incompletas; (iii) introduzir a resolução de equações do 2.º grau completas através do processo de completar o quadrado e alguns exercícios de aplicação e (iv) dedução da fórmula resolvente e resolução de equações do 2.º grau por aplicação da fórmula resolvente.

Tendo em conta as caraterísticas da turma, o professor pensou numa estratégia que pudesse captar a atenção dos alunos desde os minutos iniciais. A estratégia passava por contar uma breve história sobre as equações do 2.º grau, mais especificamente, como estas foram abordadas pelos antigos povos da civilização Mesopotâmica ou Babilónica e na civilização Europeia a partir do séc. XVI. Esta abordagem tinha como objetivo por um lado, perceber a reação da turma, por outro lado, permitir ao professor adquirir alguma experiência sobre a inclusão da história da Matemática na sala de aula para motivar a introdução de um conceito ou fornecer uma outra perspetiva sobre o mesmo.

Tendo em conta que os alunos revelaram algumas dificuldades na resolução das equações do 2.º grau incompletas nas aulas anteriores, o professor estagiário pensou que seria importante começar com uma revisão das mesmas. Assim, no seguimento da abordagem histórica pretendeu-se que os alunos recordassem a resolução das equações incompletas do 2.º grau, do tipo $ax^2 = 0$, com $a \neq 0$, $ax^2 + c = 0$, com $a, c \neq 0$ e do tipo $ax^2 + bx = 0$, com $a, b \neq 0$ (conteúdo trabalhado no 8.º ano). Como forma de perceber se os alunos se recordavam da resolução dos três tipos de equações do 2.º grau incompletas a professora titular sugeriu que solicitasse aos alunos um exemplo de cada um dos tipos de equação. Em seguida o professor estagiário iria optar por resolver cada uma delas, recordando o processo de resolução e solicitando, sempre que possível, a participação dos alunos.

Para introduzir a resolução de equações do 2.º grau completas pelo processo de completar quadrados, o professor planeou começar com dois exemplos: um exemplo em que o primeiro membro da equação é o desenvolvimento do quadrado de um binómio e um segundo exemplo em que o primeiro membro não o é. Nesta parte o professor iria também aproveitar para recordar os casos notáveis da multiplicação de um binómio que são indispensáveis nesse processo.

Após a explicação do processo o professor estagiário teve em consideração a proposta de alguns exercícios do manual, com algum cuidado na escolha e na definição da ordem de resolução dos exercícios propostos. Os primeiros exercícios seriam de dificuldade reduzida e permitiriam averiguar se os alunos compreenderam ou não o processo de completar o quadrado. Numa das questões iriam usar as expressões do tipo $ax^2 + bx$, $(a, b \neq 0)$ com $a = 1$ que são relativamente simples para uma primeira abordagem deste processo. Em seguida teriam que verificar a aprendizagem da aplicação do processo usando expressões do tipo $ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \neq 0)$, que seriam muito úteis para a resolução de equações completas do segundo grau. Era importante perceberem o processo de completar o quadrado antes da resolução de equações completas, utilizando o mesmo processo em que seriam abordadas nos exercícios seguintes de modo a avaliar as dificuldades que os alunos ainda manifestam.

No seguimento da aula o professor iria começar por deduzir a fórmula resolvente. Para isso o professor optou por resolver simultaneamente as equações $2x^2 + x - 1 = 0$ e $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, dividindo o quadro ao meio e indicando todos os passos de resolução. É importante referir que a resolução simultânea permite uma maior visualização e compreensão por parte dos alunos, uma vez que resolver equações que apenas envolvem variáveis e constantes desconhecidas é algo que suscita sempre dúvidas nos alunos. No final da aula se houvesse algum tempo o professor iria propor alguns exercícios de aplicação, explicitando aos alunos alguns passos de resolução de uma equação do 2.º grau utilizando a fórmula resolvente.

Execução da aula

Durante a aula, tal como planeado, o professor estagiário começou a aula com uma abordagem histórica das equações do 2.º grau e os alunos aderiram bastante a esse momento da aula, todos em silêncio e de olhos no professor, escutaram a história. Posteriormente o professor solicitou aos alunos um exemplo de cada um dos três tipos de equações do segundo grau incompletas e a participação dos mesmos no processo de resolução. Seguidamente o professor estagiário começou por abordar o processo de completar o quadrado recorrendo a dois exemplos, tal como descrito na planificação da aula.

É importante referir que a execução da aula, no seu todo não decorreu da forma como o professor estagiário havia planeado. Inicialmente o professor estagiário pensou que utilizaria menos tempo na abordagem histórica, mas acabou por utilizar mais tempo do que era suposto. O professor considerou que seria necessário despender mais tempo nas revisões das equações do segundo grau incompletas, visto que os alunos manifestaram algumas dúvidas e seriam importantes para uma melhor abordagem das equações do 2.º grau completas. No entanto, tendo sido abordado nas aulas anteriores as equações do segundo grau incompletas, nesta aula deveriam ter sido abordadas de uma forma mais ligeira. Outra dificuldade, que o professor já antecipara, foi a falta de compreensão dos alunos no processo de completar o quadrado. Consideramos que algumas explicações do professor foram muito confusas para os alunos e esse aspeto também influenciou o ritmo da aula.

Na parte final da aula o professor pretendia propor alguns exercícios de aplicação sobre o processo de completar o quadrado e abordar a resolução de equações do 2.º grau, utilizando a fórmula resolvente, mas não foi possível. A demora na abordagem histórica, as dificuldades de compreensão dos alunos do processo de completar o quadrado e algumas estratégicas menos claras para explicar o processo, sendo necessário recorrer a vários exemplos, foram aspetos que contribuíram para o incumprimento do plano inicial elaborado pelo professor.

Análise após a aula

No decorrer da abordagem histórica, das revisões efetuadas e do processo de completar o quadrado, a professora orientadora Rosário Lopes e a professora Doutora Maria Helena Santos apontaram alguns aspetos menos positivos.

O professor estagiário demorou muito tempo na parte da contextualização histórica das equações do segundo grau. Houve alguns aspetos que poderia ter omitido e que não fariam falta. O professor estagiário realmente tinha planeado 15 minutos e demorou o dobro do tempo. Por outro lado, quando solicitou alguns exemplos de equações do segundo grau houve um aluno que respondeu que um dos tipos de equação do segundo grau incompleta poderia ser $ax^2 + b = 0\ (a, b \neq 0)$ em vez de $ax^2 + c = 0\ (a, c \neq 0)$. A professora orientadora realçou que devia ter aproveitado a resposta do aluno para explicar porque usou o c e não b, uma vez que também poderia ser b. Portanto deveria explicar que estamos a assumir que b é o coeficiente do termo do primeiro grau e que não pode assumir ao mesmo tempo o papel de termo independente, mas que na verdade as letras que usamos para os coeficientes podiam trocar-se entre si ou até ter outras letras a representá-los, sendo que é mais comum usar as letras a para o coeficiente do termo de grau 2, b coeficiente do termo de grau 1 e c para o termo independente.

Na resolução de uma equação do tipo $ax^2 + bx = 0\ (a, b \neq 0)$ o professor estagiário explicou que devemos começar por colocar o x em evidência. No entanto, a forma como o professor estagiário explicou aos alunos não foi muito clara. Na explicação, o professor começou por dizer «já sabemos que é x (…)» e a professora orientadora salientou que não deveria ter dito «já sabemos» porque se um aluno tem dúvidas é porque possivelmente não sabe. Outro aspeto relevante é o facto de o professor estagiário ter chamado atenção dos alunos sobre o procedimento a utilizar se a equação não estivesse escrita na forma canónica. Apesar de ter realçado que devem em primeiro lugar escrever a equação na forma canónica, devia também ter perguntado aos alunos se sabiam o que quer dizer forma canónica.

Outra situação foi o facto de explicar aos alunos que a equação $x^2 = -1$ não tem solução, justificando que não há nenhum número que ao quadrado dê -1. No entanto, seria importante reforçar que isso não é possível no conjunto dos números reais, mas que, por exemplo, no futuro se forem para Matemática A irão estudar um novo conjunto numérico em que a equação já seria possível.

No momento da aula em que o professor estagiário estava a explicar o processo de completar o quadrado um aluno referiu que na resolução da equação $x^2 + 6x + 9 = 0$ começava por passar o 9 para o segundo membro, mas o professor não aproveitou para explicar que não iria funcionar. No entender do aluno poderia estar a pensar na resolução $x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x = -9 \Leftrightarrow x(x + 6) = -9$ e depois aplicar a lei do anulamento do produto, o que neste caso não se aplica porque o segundo membro não é zero, mas que os alunos fazem com alguma frequência. Seria muito importante ter explorado esta situação de modo a que os alunos percebessem que uma equação do segundo grau completa não se resolve da mesma forma que as incompletas, embora existam alguns procedimentos na resolução das equações incompletas que poderão também ser usados na resolução das equações completas.

A forma como o professor estagiário explicou o processo para resolver a equação $x^2 + 6x + 9 = 0$ foi muito confusa para os alunos. A ideia seria usar o procedimento inverso aos casos notáveis, uma vez que o primeiro membro é o desenvolvimento do quadrado de um binómio. A explicação poderia ser: x^2 é o quadrado de x, $6x$ é o dobro de $3x$ e 9 é o quadrado de 3, portanto $x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 0$. Em seguida o professor perguntou qual seria o passo seguinte, mas os alunos não conseguiram responder de forma assertiva e o professor não aproveitou as respostas erradas dos alunos para explicar porque é que a resposta dos alunos estava errada fazendo, imediatamente, analogia à equação $x^2 = 0$ o que deixou os alunos mais confusos. Para resolver $(x + 3)^2 = 0$ bastaria apelar para o conceito de potência, ou seja, uma potência de expoente não nulo só é zero se a base for zero.

Na resolução da equação $x^2 - 6x + 5 = 0$ pelo processo de completar o quadrado o professor explicou aos alunos que devem adicionar e subtrair no primeiro membro o quadrado da metade do coeficiente de x, ou seja $\left(-\frac{6}{2}\right)^2$. O professor demorou demasiado tempo a tentar explicar esse processo e os alunos não acompanharam como seria esperado porque não houve muita clareza na forma como o professor explicou.

Durante a abordagem histórica houve um momento em que o professor explicou como os babilónios resolviam uma equação do tipo $x^2 - bx = c$ ($b > 0$ e $c > 0$). Explicou que em primeiro lugar calculavam a metade de b, $\frac{b}{2}$ e depois calculavam o quadrado dessa metade, $\left(\frac{b}{2}\right)^2$. Ora essa estratégia dos babilónios é exatamente os primeiros passos do processo de completar o quadrado, mas o professor estagiário não aproveitou esse facto para fazer uma conexão entre a abordagem história e o processo, que teria sido bastante útil.

Além dos momentos menos positivos, a professora titular da turma considerou que a estratégia da abordagem histórica foi positiva. Outro aspeto importante foi a forma como o professor explicou aos alunos porque é que os coeficientes b e c na equação $ax^2 + bx + c = 0$ têm que ser diferentes de zero para que se possa ter uma equação completa do 2.º grau.

Após o término da aula, o professor estagiário analisou a sua prestação durante a aula e os comentários feitos pelas professoras e tomou consciência de alguns aspetos menos positivos que ocorreram no desenvolvimento da aula. O professor muitas vezes não aproveitou as respostas dos alunos, ou seja, quando erravam uma pergunta, o professor não aproveitou os erros dos mesmos para promover discussões e tentar esclarecer com exemplos concretos, porque é que a resposta não estava correta. Esse aspeto é essencial, e não foi aproveitado da melhor forma pelo professor para incentivar a participação dos alunos, promover a comunicação na sala de aula e a interação professor-aluno.

Globalmente o professor estagiário considera que os conteúdos essenciais desta aula não foram apreendidos pelos alunos como se pretendia, nomeadamente, durante a abordagem ao processo de completar o quadrado. Reconhece-se que algumas estratégias de esclarecimento do processo não foram muito claras e podem ter dificultado a sua compreensão por parte dos alunos. A clareza nas explicações do professor é algo crucial, sobretudo quando os alunos têm dificuldades de aprendizagem. O professor estagiário ficou de certa forma um pouco incomodado quando percebeu que deveria ter sido mais convincente nas suas explicações, algo que reconheceu e revelou às professoras imediatamente após o término da aula.

Um dos aspetos de grande relevância na sala de aula é o facto do professor ter sempre o cuidado de tentar perceber se os alunos compreenderam determinados conceitos. Por vezes, o professor fala em determinados conceitos, mas não questiona os alunos a fim de averiguar se eles realmente sabem do que se trata. Nesta aula o professor estagiário não insistiu em determinados assuntos tanto quanto deveria e refletiu que este será um dos aspetos a ter em conta e a melhorar contribuindo assim para um melhor desempenho futuro do professor. Por outro lado, o professor reconhece que deveria ter algum cuidado com a correção de linguagem e a utilização de algumas expressões coloquiais na exposição dos conteúdos.

O professor estagiário considera que a referência histórica das equações do segundo grau foi bastante positiva e foi algo que interessou os alunos. Essa constatação reforçou a ideia de que o uso da abordagem histórica para introduzir um conceito é uma estratégia eficaz para captar a atenção dos alunos e motivá-los para a aprendizagem do respetivo conceito. No entanto, é importante referir que esta abordagem foi pouco realçada e conectada a outros momentos da aula e seria relevante que os alunos apercebessem que a mesma estava diretamente relacionada com os conceitos trabalhados na aula. As professoras orientadoras consideraram muito positiva a abordagem histórica e também o entusiasmo com que a informação foi transmitida pelo professor estagiário. Consideraram ainda que esta abordagem, quase teatral, pode ser muito positiva na motivação dos alunos já que põe em destaque a motivação do professor pelos conteúdos que está a ensinar.

Os aspetos menos positivos referidos anteriormente deveram-se, essencialmente, à falta de experiência do professor estagiário. No entanto, esta aula proporcionou um elevado número de experiências que, com certeza, serão muito importantes no desempenho profissional do professor. Foram feitas várias considerações, pelas professoras que supervisionaram a aula, relativamente às estratégias utilizadas, à sua adequação à turma, à postura do professor durante a aula e ao rigor na abordagem dos conteúdos, contribuindo bastante para a aprendizagem do professor.

3.5.1.4. Aula n.º 4

Planificação da aula

Nesta aula seria abordada pela primeira vez o estudo da trigonometria no triângulo retângulo. Neste sentido, e uma vez que se tratava de uma aula de 50 minutos, o professor estagiário planeou a aula em dois grandes momentos: Na primeira parte da aula, começaria por abordar algumas curiosidades sobre a trigonometria e a sua aplicação em situações reais, nomeadamente a importância da trigonometria nos campos da astronomia, navegação marítima e engenharia. Esta estratégia tinha como objetivo captar a atenção dos alunos, bem como, sensibilizá-los e motivá-los para o estudo do tema consciencializando-os para a sua importância na sociedade atual. O professor estagiário tinha planeado aproveitar estas curiosidades para fazer uma referência aos alunos que pretendiam seguir estas três áreas, sobretudo a engenharia e desta forma incutir neles a importância da Matemática para os engenheiros e diminuir de certa forma a ideia de que a Matemática não serve para nada. O professor também iria aproveitar para apresentar imagens onde consta o desenho de um triângulo retângulo utilizado para medir distâncias e salientar a extrema importância dos triângulos na resolução de muitos problemas e no desenvolvimento do conhecimento matemático.

Na segunda parte da aula, tendo em conta as dificuldades dos alunos, em particular, com os conteúdos dos anos anteriores e que a semelhança de triângulos é um tópico relevante para o estudo da trigonometria optou-se por efetuar uma revisão desses conteúdos após a apresentação das curiosidades referidas anteriormente. Na parte final da aula, após uma breve revisão do professor iriam ser propostas alguns exercícios de revisão com o objetivo dos alunos recordarem os critérios de semelhança de triângulos e que lados correspondentes de dois triângulos semelhantes são diretamente proporcionais, sendo o último aspeto importante para a perceção dos alunos sobre as razões trigonométricas que seriam abordadas na aula seguinte.

Execução da aula

A aula iniciou com alguma agitação por parte dos alunos por isso foi necessário o professor estagiário tomar a iniciativa de manter a ordem na sala, de modo a criar um ambiente propício para bom funcionamento da aula.

Tal como tinha sido planificado, o professor estagiário iniciou a aula, referindo a origem da palavra trigonometria e ilustrando algumas aplicações em situações reais em que se faz o uso da trigonometria. Atentos e interessados, os alunos tomaram conhecimento da importância do estudo da trigonometria e o papel que desempenha na sociedade atual. Nesta primeira parte da aula o professor sentiu que conseguiu captar a atenção dos alunos, tal como se pretendia na preparação da aula. No entanto faltou frisar algumas opções que foram planeadas na planificação desta aula, por exemplo, que as imagens apresentadas durante as curiosidades continham o desenho de um triângulo retângulo para o cálculo das distâncias inacessíveis e seria importante chamar a atenção para isso de modo a incutir nos alunos que o triângulo retângulo é relevante no cálculo destas distâncias.

No que se refere às revisões sobre a semelhança de triângulos, inicialmente foi possível reconhecer algumas dificuldades dos alunos em recordar os critérios de semelhança, mas depois houve alguma adesão e participação dos alunos. Nas explicações do professor sobre os critérios de semelhança foram usados dois triângulos que à partida estavam sempre na mesma posição e não ficou claro que os triângulos poderiam estar em posições diferentes da que foi apresentada. No entanto, na resolução dos exercícios alguns pares de triângulos tinham posições diferentes, mas tal não foi frisada. Na parte final da aula o professor estagiário resolveu alguns exemplos de aplicação dos critérios de semelhança com recurso aos slides, solicitando a colaboração dos alunos e estes foram participativos.

Pretendia-se propor alguns exercícios do manual, mas devido à falta de tempo os mesmos foram propostos como trabalho de casa.

Análise após a aula

Globalmente a aula foi satisfatória, mas houve alguns pontos importantes que as professoras orientadoras partilharam e que tornaria a aula mais produtiva:

- O professor estagiário não chamou a atenção para o facto de as imagens apresentadas nas curiosidades conterem o desenho se um triângulo retângulo e seria importante fazer a conexão com o que seria estudado. Por outro lado, o professor estagiário salientou que, no âmbito do estudo da trigonometria do 9.º ano, seriam usadas apenas triângulos retângulos. No entanto, deveria expor aos alunos que o estudo da trigonometria não envolve apenas o uso do triângulo retângulo, pois o triângulo pode não ser retângulo e até pode não ser usado nenhum triângulo.
- Alguns manuais escolares referem que "duas figuras dizem-se semelhantes se tiverem a mesma forma". O professor estagiário transmitiu a mesma ideia aos alunos, mas as professoras consideraram que deveria ter algum cuidado com essa afirmação porque isso nem sempre é verdade. Por exemplo dois retângulos têm sempre a mesma forma, mas nem sempre são semelhantes.
- Durante a revisão dos critérios de semelhança o professor apresentou aos alunos um par de triângulos posicionadas da mesma forma e desenhou-os no quadro exatamente como estavam. Faltou salientar que os triângulos poderiam ter posições diferentes ou então apresentar outros pares de triângulos em diversas posições de modo a evitar que os alunos tirassem conclusões erradas quando tal não acontecia. Geralmente os alunos têm dificuldades em aplicar os critérios de semelhança quando as figuras são apresentadas em posições diferentes, porque exige uma maior concentração na identificação de quais os lados que são correspondentes.
- Por outro lado, apesar do professor ter referido aos alunos que devem ter o cuidado de comparar ângulos correspondentes e lados correspondentes, não foi muito claro para os alunos o que realmente significa, por exemplo, "lados correspondentes" e esse aspeto não foi devidamente explicado. Para explicar esta situação devia apresentar um exemplo em que os triângulos não são semelhantes para os alunos perceberem a importância de se comparar ângulos e lados correspondentes.
- Ao abordar o critério de semelhança AA não foi explicado aos alunos por que razão esse critério é abreviado por apenas duas letras e não três como os critérios LLL e LAL. Assim devia chamar atenção que se dois pares de ângulos correspondentes são iguais os outros ângulos correspondentes também são. Outro aspeto relevante é o facto de não esclarecer que a verificação de um dos critérios garante que os três lados e os três ângulos sejam iguais.

A importância de se exigir que a aula inicie de forma ordenada é um dos aspetos que um professor deve valorizar, uma vez que existe maior probabilidade da aula continuar mal quando se inicia de forma inadequada. Por isso foi produtivo ter chamado atenção dos alunos para a necessidade de concentração, algo que não foi feito nas aulas anteriores. O professor estagiário considera que demorou mais tempo do que era previsto na abordagem das curiosidades, mas melhorou em comparação com uma das aulas em que foi apresentada uma nota histórica. Nesse aspeto as professoras consideraram que deveria ter abordado mais depressa as curiosidades sobre a trigonometria, mas, na parte das revisões justificava a explicação de forma mais lenta para que os alunos pudessem perceber melhor o que estava a ser transmitido. No entanto a estratégia de apresentar as curiosidades da trigonometria cumpriu os objetivos e mais uma vez percebeu-se que essa metodologia contribui bastante para a captação da atenção dos alunos. Também foi positivo ter perguntado aos alunos quem queria ser engenheiro e alertar para o facto de vir a precisar de trigonometria na sua profissão e criar uma ponte entre a Matemática e a realidade.

O professor não teve a preocupação de cumprir o plano de aula, uma vez que esse não era o objetivo principal e por falta de tempo não foram resolvidos alguns exercícios. Outro aspeto menos conseguido nesta aula e de grande relevância é a falta de insistência do professor na explicação de algumas noções, algo que se verificou também nas aulas anteriores. Considerando que os alunos têm uma certa dificuldade na compreensão dos conceitos, por vezes, sentiu-se que deveria ter havido uma maior aposta na preparação da aula por parte do professor estagiário, para dar resposta às debilidades demonstradas pelos alunos, nomeadamente, tentando encontrar formas de expor teoricamente os conteúdos consoante o grau de dificuldade demonstrado.

3.5.1.5. Aula n.º 5

Planificação da aula

As aulas n.º 4 e n.º 5 eram sequenciais, pelo que a planificação desta aula foi influenciada pela planificação da aula anterior. Na aula passada foram propostos alguns exercícios sobre a semelhança de triângulos como trabalho de casa e, por isso, o primeiro momento da aula foi dedicado ao esclarecimento das dúvidas e à resolução dos exercícios em que os alunos referiram ter encontrado maiores dificuldades.

Esta aula tinha como principal objetivo definir as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de ângulos agudos, em triângulos retângulos. Assim, para uma melhor compreensão dos alunos, o professor recorreu ao *software* Geogebra para efetuar uma experiência com os alunos no segundo momento da aula. A experiência consistia em mover o ponto que corresponde ao ângulo de 90 graus, alterando assim as dimensões do triângulo, de modo a que os alunos percebessem o que acontece às razões entre os comprimentos de cada um dos pares de lados do triângulo (Figura 3.11). Os alunos deveriam concluir que ao fixar um dos ângulos agudos num triângulo retângulo, as razões entre os pares de lados mantêm-se inalteradas, independentemente do comprimento dos três lados do triângulo. Por outro lado, que uma alteração na amplitude do ângulo agudo fixado inicialmente provocaria uma alteração no valor das razões trigonométricas.

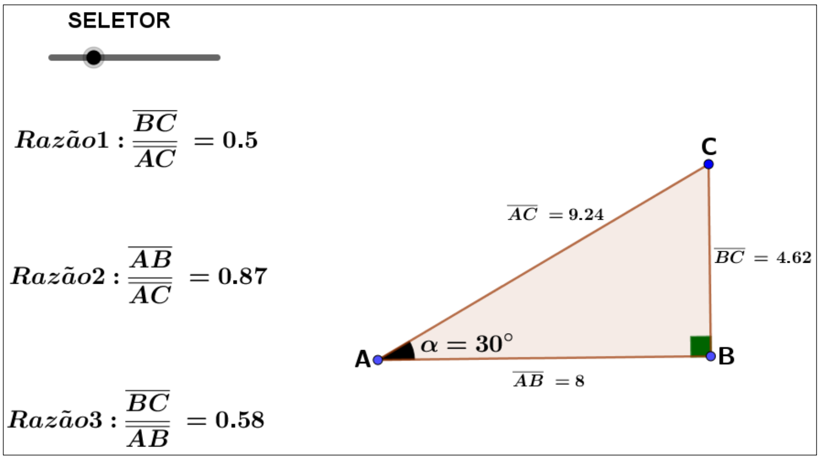


Figura 3.11 – Experiência com o Geogebra na sala de aula. Razões trigonométricas

Após a experiência no Geogebra, o terceiro momento da aula era dedicado a uma síntese das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo no quadro para os alunos passarem para o caderno diário e apresentar alguns exemplos de aplicação. Foram também efetuadas algumas considerações importantes relacionadas com as respetivas razões trigonométricas, nomeadamente, designar os lados menores do triângulo retângulo pelos catetos oposto e adjacente ao ângulo, verificar que as razões trigonométricas seno e cosseno de ângulos agudos com amplitudes entre 0 e 90 graus assumem valores no intervalo $]0,1[$ e que a tangente assume qualquer valor positivo. Optou-se por abordar também as razões trigonométricas de ângulos complementares.

Dada a importância do uso das calculadoras no tema da trigonometria optou-se por solicitar aos alunos a obtenção de algumas razões trigonométricas de um ângulo agudo com a calculadora. No quarto e último momento da aula planeou-se propor alguns exercícios de consolidação e enviar alguns como trabalho de casa. Procurou-se escolher exercícios do manual que permitissem averiguar a compreensão dos alunos relativamente aos conteúdos abordados na aula.

Execução da aula

Os alunos fizeram algum barulho na parte inicial da aula e, apesar do professor estagiário ter chamado a atenção, continuaram com o barulho. A professora titular interveio e ameaçou mandá-los para fora da aula. Após esse momento a aula continuou normalmente.

De acordo com o que foi descrito no plano de aula o professor começou por perguntar aos alunos se havia dúvidas de trabalho de casa. Tendo em conta que uma aluna manifestou dificuldades num dos exercícios propostos sobre a semelhança de triângulos, o professor optou por resolver no quadro solicitando a colaboração dos alunos. Dadas as dificuldades que a turma apresentou na compreensão do exercício e algumas opções menos eficazes que o professor adotou na resolução do exercício, acabou-se por demorar mais tempo do que era suposto nesse momento da aula. Por outro lado, tendo em conta que vários alunos não realizaram o trabalho de casa e que seria importante a compreensão dos mesmos sobre a noção de semelhança de triângulos, para que pudessem perceber melhor o que seria abordado na aula, procurou-se deixar claro esses conceitos.

No segundo momento da aula a experiência com o Geogebra surtiu o efeito desejado. Alguns alunos mostraram-se colaborantes e a maioria esteve atento. O professor estagiário teve em consideração alguns aspetos importantes durante a apresentação no Geogebra de modo a evitar que os alunos adquirissem ideias erradas, por exemplo, deixar claro que os valores visualizados no Geogebra não eram valores exatos. No entanto existiram outros aspetos que o professor deveria ter em conta e que as professoras orientadoras chamaram à atenção após a aula.

De acordo com o que foi planificado foram definidas as razões trigonométricas e efetuadas algumas considerações pertinentes. Nesse momento da aula a turma revelou pouca capacidade na aquisição de conhecimentos, o que seria normal tendo em conta que é o primeiro contacto com o tema. A respeito das dificuldades dos alunos, e apesar de não ter sido incluído no plano de aula (mas estava nos slides), o professor optou por recorrer a um exemplo de aplicação para escrever as razões trigonométricas de um ângulo agudo e tentar colmatar algumas dúvidas dos alunos. Referir ainda que houve alguma resistência por parte de alguns alunos, quando solicitados, a passarem os conteúdos no caderno diário.

Após o exemplo o professor teceu algumas considerações descritas na planificação. No seguimento da aula pretendia-se abordar as razões trigonométricas de ângulos complementares, mas a professora sugeriu que os mandasse resolver os exercícios, uma vez que já não estavam a acompanhar a aula com a mesma atenção. Assim, não houve tempo para uma abordagem das razões trigonométricas de ângulos complementares e optou-se por deixar para a aula seguinte, sendo que esta seria também lecionada pelo professor estagiário.

Análise após a aula

Do ponto de vista do professor estagiário esta aula foi de grande aprendizagem, tanto a nível do rigor científico que é necessário ter sempre presente, bem como no melhoramento da estratégia delineada. As professoras referiram alguns pormenores de extrema importância e que, por certo, contribuirão para melhorar o desempenho profissional do estagiário.

- Gastou-se muito tempo na resolução do trabalho de casa. O professor poderia ter usado uma estratégia de resolução que fosse mais fácil para os alunos e ocupasse menos tempo.
- Durante a experiência com o Geogebra, começou-se por mover o ponto correspondente ao ângulo de 90 graus muito rápido e não se percebia que os comprimentos dos lados estavam a alterar, mas depois o professor reduziu o movimento. Por outro lado, seria melhor os alunos visualizarem os valores dos lados em cada uma das razões e perceberem que estão a sofrer alteração. Da forma como foi apresentada é possível observar as alterações nos

comprimentos dos lados apenas quando é fixada o olhar no triângulo, sendo que não era apropriado visualizar simultaneamente o triângulo e as razões. O professor referiu que as razões eram valores aproximados e para os alunos perceberem isso foi alterada o número de casas decimais de 2 para 15 no Geogebra, mas faltou enfatizar que mesmo com 15 casas decimais ainda era um valor aproximado. Foi também referido que os valores indicados eram dízimas infinitas não periódicas, mas não foi dito que poderiam ser dízimas finitas ou infinitas periódicas.

- Na alteração do valor da amplitude do ângulo agudo, o professor usou um seletor (Figura 3.11) e, quando parou o movimento, era possível visualizar uma amplitude de 89º. Tendo em conta que o Geogebra apresenta um valor aproximado das razões, era possível visualizar também que uma das razões assumia o valor igual a 1 para essa mesma amplitude, o que não era verdade. Essa situação devia ser evitada para não induzir os alunos em erro.
- No terceiro momento da aula, o professor escreveu no quadro que o cateto oposto é o lado do triângulo que "fica em frente ao ângulo agudo", mas, seria mais prudente dizer isso oralmente em vez de escrever no quadro. Foi também exposta que a hipotenusa é sempre o lado maior do triângulo e não foi explicada a razão de ser o lado maior, embora tal devesse ser já do conhecimento dos alunos. Quanto à síntese das razões trigonométricas escrita no quadro, uma vez que as mesmas estavam nos slides, deveria ter sido solicitado aos alunos para copiarem através dos slides de modo a ganhar algum tempo útil de aula.
- No esclarecimento das dúvidas sobre as razões trigonométricas, o professor apenas deu um exemplo de aplicação e este foi insuficiente para o esclarecimento das dúvidas dos alunos.
- Apesar de ter dito oralmente que a tangente de um ângulo agudo pode assumir qualquer valor positivo, nos slides de apresentação não havia destacado que os valores são positivos.
- Num dos momentos da aula foi solicitado aos alunos a obtenção das razões trigonométricas na calculadora, mas surtia mais efeito se tivesse dado um exemplo no quadro.

Em geral a aula decorreu de acordo com o plano, com a exceção da abordagem das razões trigonométricas de ângulos complementares, porque gastou-se muito tempo na resolução de um dos exercícios de trabalho de casa. Embora o plano tenha sido cumprido na generalidade, notou-se a necessidade de melhorar a gestão do tempo de aula.

Consciencializou-se que o exemplo utilizado para esclarecer as dúvidas dos alunos foi insuficiente e eram precisos mais exemplos que possibilitassem maior intervenção dos alunos. Contudo, o professor aproveitou bem o exemplo dado para esclarecer uma dúvida de um aluno sobre os valores que podem assumir as razões trigonométricas. Apesar disso, para uma melhor compreensão dos alunos de que a tangente assume qualquer valor positivo, deveria enfatizar dois exemplos onde esse valor é respetivamente inferior e superior a 1. O facto de os exemplos não terem sido explicitados no plano de aula, não permitiu que a professora orientadora fizesse algumas sugestões. Na planificação da aula, o professor estagiário deveria ter pensado em intercalar um momento prático depois da síntese das razões trigonométricas e criar outro foco na aula, pois os alunos já não estavam a acompanhar.

Destaca-se também alguma falta de concordância entre aquilo que foi dito oralmente e o que apareceu escrito nos slides. Também existem alguns aspetos que fazem sentido dizer oralmente, mas que não se devem escrever no quadro, de modo a evitar que os alunos copiem frases informais para o caderno e com menor rigor científico. Outras das dificuldades do professor estagiário que ainda não foram ultrapassadas traduz-se, por um lado, na falta de insistência em esclarecer com mais pormenor algumas noções, mesmo que sejam revisões e por outro, no aproveitamento das opiniões dos alunos para promover uma melhor interação professor-aluno.

3.5.1.6. Aula n.º 6

Planificação da aula

Na planificação desta aula cuja duração era de 50 minutos, optou-se por iniciar a aula com uma abordagem sobre as relações existentes entre as razões trigonométricas de ângulos complementares que não foi discutida na aula anterior. Assim, o professor pretendia recorrer a alguns exemplos para solicitar aos alunos a escrita das razões trigonométricas seno e cosseno de dois ângulos agudos complementares e em seguida questioná-los sobre as razões obtidas no sentido de efetuarem uma comparação. O objetivo era perceberem que o seno de um dos ângulos agudos é igual ao cosseno do outro ângulo agudo e vice-versa, ou que o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do seu complementar e vice-versa.

O segundo objetivo da aula prende-se com a utilização de uma tabela de razões trigonométricas ou de uma calculadora para determinar o valor da amplitude de um ângulo a partir de uma das suas razões trigonométricas, bem como o comprimento de um dos lados do triângulo retângulo. Assim uma das preocupações do professor estagiário seria explicar aos alunos através de exemplos práticos como utilizam a calculadora e a tabela que consta no manual para obterem as medidas do comprimento dos lados e da amplitude de um ângulo agudo num triângulo retângulo, tendo em conta as razões trigonométricas estudadas na aula anterior. Outra preocupação foi a escolha dos exemplos práticos, tendo sido escolhidos alguns exemplos que envolviam situações da vida real de modo a captar algum interesse dos alunos durante as explicações do professor. Para determinar o comprimento de um dos lados do triângulo, procurou-se também escolher exemplos que permitissem utilizar cada uma das três razões trigonométricas, seno, cosseno e tangente.

O professor considerou que seria importante propor aos alunos uma "dica" para o cálculo dos comprimentos e da amplitude de um ângulo agudo num triângulo retângulo utilizando as razões trigonométricas referidas anteriormente. Tendo em conta que os alunos poderiam ter dificuldades em decidir qual das razões devem usar, foi dito aos mesmos que devem ter sempre presente as seguintes questões:

- Quais são as medidas conhecidas no triângulo?
- O que se quer determinar?
- Qual das razões trigonométricas envolve o que se conhece e o que se quer saber?

Nos minutos finais seriam propostos alguns exercícios do manual. Os exercícios tinham como objetivos averiguar se os alunos compreendiam e se seriam capazes de determinar a medida de um dos lados do triângulo e a amplitude de um ângulo agudo utilizando uma razão trigonométrica adequada. Alguns exercícios seriam enviados como trabalho de casa.

Execução da aula

A execução da aula seguiu a mesma estrutura da planificação. No início da aula, o professor recorreu a alguns exemplos para abordar as relações entre as razões trigonométricas de ângulos complementares. Neste momento da aula verificou-se que os alunos não compreenderam muito bem aquilo que se pretendia. Num dos exemplos foi utilizada um triângulo retângulo com medidas dos lados representadas por frações e para a obtenção das razões trigonométricas eram necessários dividir frações, sendo que houve alguma ausência de respostas dos alunos quando o professor solicitou a participação dos mesmos sobre o método de dividir frações. No entanto, uma aluna respondeu à solicitação do professor, mas a sua resposta não foi aproveitada e analisada por não ser correta, o que poderia promover algumas discussões. O professor recorreu ao método da multiplicação dos extremos e dos meios para dividir frações, mas talvez o método de multiplicar a primeira fração pelo inverso da outra fração fosse mais compreensível para os alunos.

No que respeita aos exemplos de utilização das razões trigonométricas para calcular um dos lados ou ângulos agudos desconhecidos num triângulo retângulo, os exemplos práticos e a estratégia utilizada pelo professor surtiram algum efeito na compreensão e interesse dos alunos. Embora a atenção demonstrada, o professor ficou com a ideia que os alunos não compreenderam, talvez devido à falta de compreensão dos alunos num primeiro contacto com a prática. Mas, no último exemplo dado alguns alunos participaram e responderam bem às questões do professor.

Estava previsto no plano propor quatro exemplos de aplicação, mas só houve tempo para abordar três exemplos. Face à gestão do que foi planeado para esta aula, o quarto exemplo para o cálculo de um ângulo desconhecido não foi abordado e foram enviados como trabalho de casa os exercícios que estavam previstos para a aula e para a casa.

Análise após a aula

O professor estagiário considera que o seu desempenho durante a execução da estratégia definida para esta aula foi satisfatório. No final da aula o professor estagiário reuniu com as professoras orientadoras que expressaram algumas sugestões de melhoria.

Na abordagem das relações existentes entre as razões trigonométricas de ângulos complementares, algumas estratégias para dividir frações que não foram adotadas pelo professor estagiário seriam mais eficazes. Por exemplo na divisão de 1 por $\frac{25}{7}$ podia ter referido que se tratava do inverso de $\frac{25}{7}$ e ao dividir $\frac{24}{7}$ por $\frac{25}{7}$ o resultado seria de imediato $\frac{24}{25}$ por terem o mesmo denominador. Ainda nessa abordagem uma das alunas deu a sua opinião, mas o professor não aproveitou a sua resposta para promover a discussão. As professoras aconselharam a dar maior atenção à participação dos alunos no decorrer da aula. Por outro lado, houve alguns momentos em que o professor fazia uma pergunta aos alunos e a seguir respondia imediatamente sem dar tempo para os alunos responderem.

A organização do quadro foi um dos aspetos referido pelas professoras. O estagiário deveria ter dividido o quadro para não criar confusão aos alunos. Além disso, o professor escreveu algo no quadro pouco visível para quem estivesse sentado na última fila.

Num dos exemplos abordados na segunda parte da aula apresentou-se uma imagem em que, à partida, não aparecia o desenho de um triângulo retângulo e os alunos tinham que “arranjar” esse triângulo. As professoras consideraram que a imagem deveria ter surgido *à priori* com o triângulo já desenhado para não criar confusão nos alunos. Num outro exemplo, alguns alunos confundiram o cateto oposto ao ângulo com o cateto adjacente ao mesmo ângulo e o professor frisou que era cateto adjacente, mas não realçou bem porque é que se tratava desse cateto.

As professoras consideraram que as três questões apresentadas pelo professor estagiário para ajudar os alunos a determinar um dos lados e um dos ângulos agudos desconhecidos de um triângulo retângulo foram muito bem pensadas pelo professor estagiário.

As críticas focaram aspetos que, não tendo sido bem conseguidos pelo professor, foram relevantes para a tomada de consciência do professor relativamente ao cuidado que deve ter com alguns aspetos da aula que poderão suscitar maiores dificuldades nos alunos. O professor tomou consciência da existência de algumas estratégias que poderiam ter sido mais eficazes para a compreensão dos conceitos pelos alunos. No que concerne ao aproveitamento das ideias dos alunos para promover discussões, revelou-se um ponto muito importante e com certeza é algo que deve ser melhorado. O professor estagiário não valorizou a intervenção de uma aluna por esta não se enquadrar com o objetivo da aula ou por receio de esta poder exigir muito tempo e a mesma não ser fundamental para o que se pretendia explorar. O professor reconhece a importância de os alunos sentirem que as suas opiniões são valorizadas e que devem ser uma parte importante de uma aula.

A necessidade de solicitar mais a participação dos alunos traduziu-se num dos pontos menos positivo desta aula. Em algumas situações a insistência pode incentivar os alunos a serem mais confiantes nas respostas às questões do professor. Noutra perspetiva existiram outros aspetos a melhorar, nomeadamente, a organização do quadro, a circulação pela sala para incentivar os alunos a passarem os conteúdos para o caderno diário e a gestão do tempo útil de aula.

3.5.1.7. Aula n.º 7

Planificação da aula

O objetivo central desta aula seria a abordagem das relações existentes entre as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de ângulos agudos. Ao elaborar o plano o professor considerou que a abordagem exclusivamente expositiva seria menos eficaz para potencializar o raciocínio dos alunos. Considerou-se importante os alunos realizarem uma tarefa a pares que consistia na descoberta e estabelecimento de conjeturas acerca das relações existentes entre as razões trigonométricas de um ângulo agudo. Com a realização da tarefa pretendia-se que os alunos descobrissem que para qualquer ângulo agudo α, $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ e $tg\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$. Também era fundamental que os alunos compreendessem que as relações podem ser usadas para determinar o seno conhecido o cosseno e vice-versa ou determinar seno, cosseno ou tangente conhecida duas destas razões.

Na realização da tarefa, após os alunos estabelecerem algumas conjeturas utilizando algumas amplitudes, deveriam provar que as relações se mantêm para qualquer ângulo agudo num triângulo retângulo qualquer. Tendo em conta que seria o primeiro contacto dos alunos com o processo de demonstração, procurou-se antecipar as dificuldades dos alunos. Por isso, de modo a facilitar esse processo foram incluídas no enunciado algumas etapas da demonstração em que os alunos teriam de preencher uns espaços em branco no enunciado.

Uma das preocupações na elaboração do plano seria o papel do professor durante a realização da tarefa. Pretendia-se acompanhar e apoiar os alunos no trabalho autónomo, assegurar que os alunos se envolviam ativamente e que compreendiam as questões propostas e interferir de forma ligeira e discreta nos trabalhos dos alunos.

Terminado o tempo de realização da tarefa o professor recolhia as fichas e haveria um momento dedicado à discussão em grande grupo sobre as conclusões a que chegaram e as dificuldades que sentiram durante a tarefa. Previa-se que os alunos tivessem algumas dificuldades nas demonstrações, por isso, o professor iria clarificar as dificuldades que os alunos apresentassem, efetuando de novo as demonstrações necessárias. Seguidamente o professor iria sistematizar no quadro as ideias envolvidas usando uma simbologia e um vocabulário matemático adequados.

Na aula anterior, ficou por abordar um dos exemplos em que se pretendia determinar a amplitude de um ângulo agudo num triângulo retângulo, cujo processo é semelhante à determinação de um dos lados. Assim, após a realização da tarefa e antes de propor os exercícios de aplicação aos alunos, o professor explicaria esse exemplo em colaboração com os alunos e aproveitando para esclarecer a utilização e a função das teclas tg^{-1}, sen^{-1} e cos^{-1} na calculadora.

Tendo em conta que esta aula, era a última da sequência de seis tempos lecionados sobre a trigonometria, a professora titular sugeriu a proposta de uma questão aula com o objetivo de avaliar a aprendizagem dos alunos durante estas aulas sequenciais lecionadas pelo professor estagiário. A questão aula era constituída por duas questões de trigonometria, sendo elaborada pelo professor estagiário e aprovada pela professora Rosário Lopes. Assim, os 15 minutos finais estavam reservados para a proposta da referida questão aula.

Execução da aula

Conforme previsto, nos 5 minutos iniciais da aula fez-se a motivação e a apresentação da tarefa. Tendo em conta o desempenho matemático dos alunos foi necessário clarificar o enunciado de modo que os alunos entendessem o que se pretendia. De seguida, o professor estagiário distribuiu o material necessário pelos grupos para se dar início à tarefa. Tal como foi referido na planificação, o professor tentou intervir o menos possível, mas vários alunos tiveram dificuldades em dar seguimento à tarefa. Alguns pares quinze minutos depois já não estavam a produzir nenhum trabalho, estando todo tempo à conversa.

Uma das dificuldades dos alunos estava relacionada com a interpretação do enunciado, pois vários perguntaram o que deveriam fazer, revelando que não compreenderam o que era necessário. Apesar do enunciado ser muito claro, tiveram alguns obstáculos, principalmente na formulação das conjeturas e nas demonstrações, situações que foram previstas pelo professor durante a planificação da aula. Outra dificuldade foi a formulação de uma conjetura, mesmo tendo sido explicado pelo professor o que é uma conjetura muitos alunos não conseguiram ser autónomos nessa questão. Outro obstáculo encontrado pelos alunos estava relacionado com as demonstrações. Nesse processo os alunos teriam de escrever as razões trigonométricas com recurso a um triângulo retângulo em que os comprimentos dos lados eram designados por letras, mas foi um pouco confuso para eles, apesar de já terem sido trabalhadas as razões nas aulas anteriores.

Dadas as dificuldades dos alunos na realização da tarefa acabou-se por ocupar mais tempo do que era previsto. Terminado o tempo, foi recolhida a tarefa e a turma expôs as conclusões a que chegaram e as dificuldades que sentiram. Uma vez que houve dificuldades na demonstração da relação $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ para um dado ângulo agudo α, o professor recorreu ao quadro para explicar com mais clareza o processo de demonstração. Após o esclarecimento, foi sintetizada a fórmula fundamental da trigonometria e a relação entre a tangente, o seno e o cosseno de um ângulo agudo.

Devido à escassez de tempo, foram propostos de seguida alguns exercícios do manual, antes da realização da questão aula. Quando se falou na proposta da questão aula, os alunos deram a entender que não queriam realizá-la e alguns perguntaram se contava para a avaliação.

Análise após a aula

No final da aula, tal como se previa, o professor ficou com a ideia de que a aula não foi produtiva, devido à pouca capacidade de trabalho dos alunos e a novidade dos termos, conjeturas e demonstrações. No final da aula as professoras orientadoras teceram algumas considerações sobre alguns aspetos menos positivos da aula.

Uma das análises efetuadas, diz respeito à organização do quadro. Durante a demostração efetuada no quadro para o esclarecimento de dúvidas, o professor escreveu várias etapas da demonstração de forma desorganizada que certamente gerou alguma confusão. Além disso, algumas linhas foram escritas na parte inferior do quadro, criando dificuldades de visualização para a última fila da sala.

Na última questão da tarefa, pretendia-se que os alunos usassem as relações encontradas para determinar o cosseno, conhecido o seno, e determinar a tangente conhecida o seno e o cosseno do ângulo. No entanto, esta questão suscitou muitas dúvidas nos alunos e, por isso, não deveria ser incluída na tarefa. Apesar das professoras considerarem que foi proposta uma boa tarefa, com a exceção da última questão, deveria ter rentabilizado melhor o tempo disponível, pois havia alunos que não estavam a realizar a tarefa, por isso, fazia mais sentido terminar a realização da mesma.

Uma das análises efetuadas relativamente à execução do plano de aula prende-se com a escassez de advertência aos alunos, no que toca, a forma como devem escrever matematicamente as relações abordadas. Sendo que, na realização da tarefa verificou-se que alguns alunos escreveram $(\sin)^2 + (\cos)^2 = 1$ em vez de $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$. Neste caso, seria necessário chamar a atenção que não se pode escrever as relações sem o ângulo em causa. Além disso, o professor não teve o cuidado de solicitar a participação dos alunos com mais frequência. O professor não se preocupou em reforçar (repetindo) alguns conceitos que são importantes e onde geralmente os alunos costumam revelar muitas dificuldades de compreensão.

Os comentários das professoras permitiram analisar os aspetos referidos e tomar consciência do que ainda não havia sido ultrapassado. Por outro lado, o facto de a turma ser bastante difícil, em que muitos alunos são desatentos, desinteressados e pouco colaborantes nos trabalhos propostos, condicionou o melhor desenvolvimento da aula. Na correção da tarefa houve pares de alunos que efetuaram as primeiras três questões e as restantes três deixaram em branco. Também se verificou que muitos efetuaram o que era pedido, mas não de forma autónoma. O professor estagiário e a professora titular intervieram na realização da tarefa devido às várias solicitações de dúvidas dos alunos, embora inicialmente se tenha pensado numa intervenção mais discreta.

Quanto à questão aula, a sua correção permitiu detetar fragilidades no conhecimento que os alunos adquiriram durante as aulas sequenciais lecionadas pelo professor. A ficha foi classificada de 0 a 50%, sendo que a primeira questão valia 30% e a segunda 20%. A classificação média foi de $14,68\%$, quatro alunos não tiveram qualquer classificação e apenas uma aluna teve quase tudo certo. Na primeira questão os alunos teriam de escrever na forma de fração irredutível as razões trigonométricas de dois ângulos agudos no mesmo triângulo retângulo em que os comprimentos de dois lados eram representados por frações. Apenas seis alunos acertaram todas as razões trigonométricas, muitos não apresentaram as razões na forma de fração irredutível, outros não conseguiram dividir frações e alguns confundiram as razões trigonométricas de um dos ângulos agudos com as do outro ângulo agudo. No que respeita à segunda questão, esta era um problema em que se pretendia determinar o comprimento da hipotenusa, sabendo a amplitude de um ângulo agudo e a medida do cateto oposto. Alguns alunos não sabiam que razões deveriam utilizar, outros mesmo escrevendo a razão corretamente não conseguiram avançar e apenas uma aluna resolveu com sucesso esta questão. Importa referir que a professora titular utilizou estas questões aula na avaliação do segundo período.

3.5.1.8. Aula n.º 8

Planificação da aula

O tema desta aula era as propriedades dos ângulos internos e externos de um polígono convexo, bem como, polígonos inscritos numa circunferência. Tendo em conta o desempenho da turma, considerou-se importante iniciar a aula com algumas revisões sobre a noção de ângulos internos e externos de um polígono convexo e caso fosse necessário rever também as noções de polígonos convexos e côncavos. Seguidamente o professor iria projetar nos slides cinco polígonos regulares com 3, 4, 5, 6 e 8 lados e solicitar aos alunos o preenchimento de uma tabela desenhada no quadro com vista à dedução de algumas fórmulas, principalmente a fórmula para o cálculo da soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados. Após essa pequena tarefa, seria efetuada uma síntese com intuito de generalizar as fórmulas para qualquer polígono convexo, efetuando algumas demonstrações necessárias no quadro e intercalando com alguns exemplos de aplicação.

Para mudar o foco da aula seriam propostos de seguida alguns exercícios do manual com o professor a circular pela sala e esclarecer algumas dúvidas que pudessem surgir. Seguidamente planeou-se abordar os polígonos inscritos numa circunferência. De modo a alterar a dinâmica da aula, no último momento seriam propostos alguns exercícios com a utilização da ferramenta Socrative.

Execução da aula

O professor iniciou a aula começando por questionar os alunos sobre as noções de polígonos convexos e côncavos e como ninguém recordava do que se tratava foi necessário explicar. Quanto às noções dos ângulos internos e externos alguns alunos participaram ativamente e mostraram-se interessados, embora houvesse algumas conversas paralelas entre alguns alunos.

Quanto ao preenchimento da tabela para a obtenção das fórmulas, o professor solicitou a participação de todos e muitos participaram com exceção dos que eram mais reservados. Destaca-se um dos alunos que percebeu de imediato que um polígono com n lados pode ser dividido, no mínimo em $n-2$ triângulos, construídos a partir de um vértice. Após a descoberta das fórmulas o professor solicitou aos alunos que passassem as sínteses das propriedades dos ângulos internos e externos de um polígono no caderno diário. Depois foram efetuadas algumas demonstrações de modo a que os alunos percebessem que as propriedades relativamente à soma dos ângulos internos e externos se verificam para qualquer polígono convexo regular ou irregular. Importa referir que houve alguma falta de clareza nas explicações do professor estagiário durante as demonstrações efetuadas e os alunos não estavam a perceber bem o que estava a ser explicado e a professora titular fez algumas sugestões que permitiram melhorar o desempenho do professor.

Em seguida o professor propôs dois exemplos de aplicação relacionados com a soma dos ângulos internos. No primeiro exemplo, os alunos estavam a ter algumas dificuldades em determinar a soma dos ângulos internos de um polígono com 20 lados. O segundo exemplo era "quantos lados tem um polígono convexo cuja soma das amplitudes dos ângulos internos é 3960º". Uma forma de responder seria através da resolução da equação $(n-2)\times 180° = 3960°$, mas um dos alunos deu uma resposta que o professor não estava à espera. Dividiu 3960º por 180º obtendo o número mínimo de triângulos em que o polígono pode ser divido, isto é 22, depois fez $22+2$ e obteve o número de lados, que é um processo mais fácil do que resolver a equação.

Após as sínteses e os exemplos, foram propostos alguns exercícios do manual. A professora titular sugeriu começar por um exercício fácil e rápido com três alíneas, em que todas pediam a soma dos ângulos externos. Um aluno respondeu $360°$ mas não tinha certeza e alguns não sabiam, o que demonstrou que não acompanharam bem a aula. Tendo em conta que já não havia mais tempo útil para a abordagem dos polígonos inscritos numa circunferência e considerando que os alunos já não estavam a acompanhar a aula, optou-se por propor aos alunos a resolução de alguns exercícios com a utilização do telemóvel e da ferramenta Socrative de modo a identificar com mais clareza o que os alunos não compreenderam na aula.

Análise após a aula

Na parte inicial da aula muitos alunos revelaram-se empenhados, colaborativos e interessados, mas na parte final do primeiro tempo e no segundo tempo alguns alunos estavam distraídos a brincar. Após o término dos dois tempos de aula foram efetuadas algumas sugestões de melhoria pelas professoras orientadoras.

No esclarecimento sobre a noção de polígonos convexos e côncavos utilizou-se a frase "o segmento contém os pontos", deve-se tentar evitar a expressão por causa dos conceitos de pertencer e contido da lógica, apesar de ser algo que dizemos frequentemente. Na verdade, o segmento não contém os pontos, mas sim os pontos é que pertencem ao segmento. Embora tal falha não comprometa a compreensão por parte dos alunos, devemos procurar ser rigorosos na linguagem. No que respeita à explicação do que é um ângulo interno optou-se pela definição que está no manual (PI 9, pág. 96), mas essa definição não está bem porque funciona para ângulo convexo e côncavo e não especificam que se trata de um ângulo convexo. No caso do ângulo externo, o professor fez bem em frisar que há dois em cada vértice, sendo que interessa apenas um dos ângulos porque têm a mesma amplitude, mas a definição do manual não está clara. No entanto, explicar estas situações aos alunos pode ser mais confuso para a compreensão deles, sendo que a omissão de algumas destas situações também pode levá-los a cometer erros.

No preenchimento da tabela para a dedução das fórmulas, muitos alunos não estavam a perceber como estava a ser preenchida. De facto, alguns alunos foram sempre respondendo e o professor deixou-se levar por eles, sem ao menos certificar se os outros alunos estavam a acompanhar. No preenchimento da tabela faria mais sentido recorrer às figuras para perceberem que, de facto, somando os ângulos internos dos triângulos em que o polígono é dividido dá a soma dos ângulos internos do polígono e esse aspeto era importante clarificar. Por isso, quando o professor propôs um exemplo de aplicação para o cálculo da soma dos ângulos internos de um polígono com 20 lados, não perceberam de imediato o que tinham que fazer porque não ficou destacado que poderiam recorrer à decomposição da figura e aí facilmente teriam conseguido chegar ao 18, sem precisar decorar as fórmulas. No entanto, um dos alunos falou no 18, mas não pelo facto de ter efetuado $20 - 2$, mas sim pela decomposição em triângulos. Outra hipótese igualmente fácil seria efetuar $20 \times 180° - 360°$ sem recorrer à fórmula. Por outro lado, mesmo seguindo os alunos que estão a participar e apesar de ter frisado várias vezes que estávamos a utilizar polígonos regulares para a dedução das fórmulas, era preciso insistir mais vezes que, nos cálculos efetuados, foram utilizados polígonos regulares e que, em caso contrário, não seria possível efetuar tais cálculos.

Na demonstração da soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados, foi utilizada um hexágono irregular. Para a decomposição do polígono em vários triângulos foi marcado um ponto no interior do hexágono e traçado os segmentos de reta em que um dos extremos é um vértice do polígono e o outro extremo é o respetivo ponto interior. As professoras orientadoras referiram que o professor deveria ter insistido que estávamos a considerar um polígono convexo com n lados (no plano de aula consta essa frase) e não propriamente um polígono com seis lados. Além disso, a forma como se vê o polígono para os alunos pode parecer que os lados são iguais e daí deduzirem que é regular sem ter em consideração a amplitude dos ângulos. Verificou-se também que o ponto situado no interior do polígono parecia estar no centro do polígono, devia tê-lo colocado noutro sítio para os alunos perceberem que a decomposição funcionava na mesma. Também não foi bem explicado porque é que um polígono convexo com n lados pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos. Nos exemplos da tabela foi deduzido o $n - 2$ e apesar de não provar nada, alguns alunos perceberem que funcionava. Já na demostração, o facto de a decomposição ser diferente esses alunos já não estavam a perceber de onde surgiu o $n - 2$, pelo que, deveria ter feito analogia às duas decomposições e frisar que ambas as estratégias de decomposição conduzem à fórmula $(n - 2) \times 180°$.

No que concerne à demonstração de que a soma dos ângulos externos de um polígono convexo com n lados é sempre 360º, o professor escreveu no quadro "cada ângulo interno é adjacente ao ângulo externo e são suplementares", mas essa frase é um pouco estranha. Seria mais fácil escrever "em cada vértice o ângulo interno e o externo são suplementares" ou podia ter escrito como estava no plano de aula.

O professor estagiário podia ter destacado a relevância da demonstração e explorar um pouco mais algumas relações. Para obter a soma dos ângulos internos podiam pensar na decomposição em triângulos a partir de um vértice do polígono ou a partir de um ponto no interior. Mas também podiam pensar na soma dos ângulos internos com os ângulos externos, como em cada vértice, o interno e o externo somam 180º, então basta efetuar $n \times 180°$ e retirar a soma dos externos que é 360º, ou seja, $S_i + S_e = n \times 180° \Leftrightarrow S_i = n \times 180° - S_e \Leftrightarrow S_i = n \times 180° - 360°$. A forma como o professor conduziu a sua aula, verificou-se que implicitamente fez um apelo à utilização da fórmula, enquanto que tudo poderia ter sido feito sem o recurso à mesma. Apesar disso, foi importante ter efetuado as demonstrações para perceberem que é sempre verdade, porque os exemplos não provam nada, mas podia apelar para a resolução através da intuição, uma vez que já tinha sido efetuada a demonstração.

Um dos momentos da aula que surpreendeu pela positiva foi a resposta de um aluno quando foi colocada a questão: "quantos lados tem um polígono convexo cuja soma das amplitudes dos ângulos internos é 3960º". A resolução do aluno foi diferente e o professor estagiário disse "neste caso dá", mas era uma resolução que funciona sempre. Inicialmente o professor não tinha percebido bem o que o aluno estava a pensar e daí a afirmação. Mesmo tendo sido explicada pelo professor a resolução da equação $(n-2) \times 180° = 3960°$, podia ter aproveitado para resolver a equação por dois processos. Em vez de começar por tirar os parêntesis devia ter dividido ambos os membros por 180º, obtendo $n - 2 = 22$ e frisar que embora seja uma resolução intuitiva, também era um processo válido. Aliás foi o que o aluno estava a fazer quando manifestou a sua opinião. O professor estagiário também verificou que um dos alunos começou por dividir por 180º nos dois membros, mas depois fez 22×2, neste caso chamou-se atenção que não era multiplicar por 2 mas somar. Alguns alunos também não sabiam se somavam ou subtraíam porque muitas vezes fazem cálculos e não sabem o que representam.

O professor estagiário aprendeu muito com esta aula e, após a reflexão que fez dos comentários das professoras, tomou consciência dos aspetos que ainda tem que melhorar. Na parte inicial da aula os alunos aderiram e alguns participaram, mas para os alunos mais reservados o professor deveria certificar se estavam ou não a compreender a aula. A partir do final do primeiro tempo muitos alunos já não acompanhavam a aula e durante a resolução de exercícios do manual eram muitos os desinteressados.

Aqui	Nome ↑	Nota (%)	1	2	3	4	5
	*****	60%	C	15	1440	Falso	B
	*****	60%	A	15	1490	Falso	A
	*****	20%	C	165	170	Verdadei	E
	*****	60%	A	15	10	Falso	A
	*****	40%	B	22	210	Falso	E
	*****	20%	C	8	360	Falso	C
	*****	60%	A	10	82	Falso	E
	*****	20%	A	17	324	Verdadei	C
	*****	80%	A	15	1440	Verdadei	E
	*****	20%	D	6	6120	Verdadei	E
	*****	0%					
	*****	80%	A	15	1440	Falso	C
	*****	40%	A	15			
	*****	0%					
	*****	60%	A	6	1440	Falso	A
	*****	40%	A	6	360	Falso	A
	*****	40%	B	40	1440	Falso	C
	*****	60%	A	15	1490	Falso	D
	*****	20%	D	5	180	Falso	B
	*****	20%	B	8	Não sei	Verdadei	E
	*****	100%	A	15	1440	Falso	E
	*****	60%	A	6	6120	Falso	E
	*****	80%	A	15	1490	Falso	E
23	Total da turma		62%	43%	30%	75%	45%

Figura 3.12 – Respostas dos alunos obtidas na ferramenta Socrative.

Através da proposta dos exercícios com a ferramenta Socrative a dinâmica da aula mudou completamente. Enquanto que havia alunos que não efetuavam exercícios do manual, com a ferramenta todos estavam focados nos seus telemóveis e interessados nos trabalhos. A ferramenta permitiu por um lado, o professor perceber com mais clareza quem esteve atento na aula e ter um maior controle do que os alunos aprenderam e, por outro lado, os alunos tomarem consciência das suas falhas.

O terceiro exercício, que se tratou de um problema envolvendo a soma das amplitudes dos ângulos internos, destacou-se com menor percentagem de respostas corretas (30%). Verificou-se também que duas alunas não responderam porque acompanharam as colegas de mesa e um dos alunos acertou em todas as questões (Figura 3.12).

3.5.2. Avaliação

Na turma do 9.º ano os critérios de avaliação em cada um dos períodos foram realizados com base em 70% dos testes sumativos, 10% das fichas de avaliação/trabalhos individuais e/ou de grupo, 9% do empenho e participação em aula, 6% do comportamento em aula e 5% da realização dos trabalhos de casa. Quanto aos instrumentos de avaliação a turma realizou ao longo do ano letivo:

- um teste diagnóstico no início do ano letivo;
- seis testes sumativos, dois em cada período;
- uma ficha de avaliação no primeiro e no segundo período.

Foi também realizada uma questão aula, elaborada e corrigida pelo professor estagiário no segundo período. Alguma questão aula foi utilizada na avaliação do segundo período com o objetivo de melhorar a classificação dos alunos que tiveram uma nota final próxima da positiva.

Nesta turma a aplicação de alguns instrumentos de avaliação foi adaptada às características da turma. Por exemplo, o primeiro teste de avaliação foi realizado em duas fases, sendo que a parte do teste realizada no segundo momento, incluiu exercícios extra que permitiam substituir alguns dos exercícios já realizados na primeira parte e onde os alunos tiveram menos bom desempenho. Esta estratégia permitiu que todos os alunos conseguissem classificação positiva no teste, melhorando assim a motivação dos alunos e a sua autoestima. Recorde-se que esta turma vinha de um passado de muito insucesso na disciplina.

3.5.3. Direção de turma

Numa atividade de estágio pedagógico, uma das tarefas do professor estagiário consiste em conhecer o papel de um diretor de turma, participando nos trabalhos que envolvem a direção de turma. Esses trabalhos são importantes, caso seja atribuída uma direção de turma no futuro. Nesse âmbito o professor estagiário contactou a diretora de turma do 9.º ano Helena Fortio (professora de Físico-Química), a qual deu a conhecer um conjunto de tarefas inerentes a um diretor de turma. A professora tinha uma larga experiência enquanto diretora de turma noutras escolas, sendo a primeira vez na escola onde decorreu o estágio. A diretora de turma prestou alguns esclarecimentos sobre: (i) o *software* de organização e gestão de faltas dos alunos; (ii) o funcionamento do regime de faltas e o procedimento para a justificação das mesmas; (iii) o seu papel no estabelecimento de relações entre a escola e os encarregados de educação, prestando várias informações por telefone ou através de reuniões, sobre o funcionamento da escola, o comportamento dos alunos, os exames nacionais e as notas finais de cada período e (iv) a identificação e resolução das situações problemáticas da turma durante o ano letivo.

O contacto com a diretora de turma permitiu perceber o papel fundamental desempenhado por um diretor de turma, na medida em que conhece melhor a vida dos alunos, fornece informações importantes quer aos alunos quer aos encarregados de educação e promove uma boa relação entre a escola e os pais ou encarregados de educação.

3.6. A turma do 10.º ano

3.6.1. Descrição

No início do ano letivo a turma do 10.º ano era constituída por 27 alunos. No entanto, ouve algumas alterações, sendo que no primeiro período, um dos alunos mudou de curso, outro aluno emigrou e no início do segundo período uma nova aluna entrou na turma, passando a estar constituída por 26 alunos. Na turma existiam 12 raparigas e 14 rapazes em que as idades no início do ano letivo eram compreendidas entre os 14 e os 16 anos. Na Figura 3.13 está indicada a distribuição das idades dos alunos do 10.º ano no início do ano letivo.

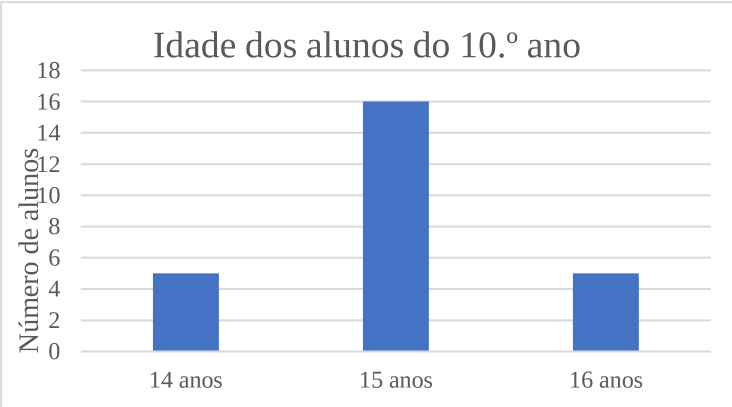


Figura 3.13 – Idade dos alunos do 10.º ano no início do ano letivo

A turma possui alunos com características diferentes, no que se refere a trabalhos em aula e em casa, bem como nos resultados de avaliação. Por observação da Figura 3.14 podemos destacar que o número de negativas foi superior ou igual ao número de positivas nos três períodos. Pode-se verificar também que os alunos melhoraram os resultados no terceiro período em comparação com os dois períodos anteriores.

No primeiro período, 58% dos alunos teve notas entre 5 e 9 valores e essa tendência foi diminuindo nos outros períodos letivos. Em contrapartida, os que tiveram notas entre 10 e 13 valores aumentou ao longo dos períodos, sendo que no primeiro período foi apenas 8%. Por outro lado, a percentagem de alunos com notas entre 14 e 16 passou de 19% no primeiro período para os 4% no terceiro período. A turma também possui alguns alunos bastante interessados e trabalhadores, melhorando as notas ao longo dos três períodos e atingindo um patamar entre 17 e 20 valores. No primeiro período apenas uma aluna atingiu esse nível, no segundo período 3 alunos e no terceiro período 4 alunos. A melhor aluna da turma teve uma classificação final de 19 valores.

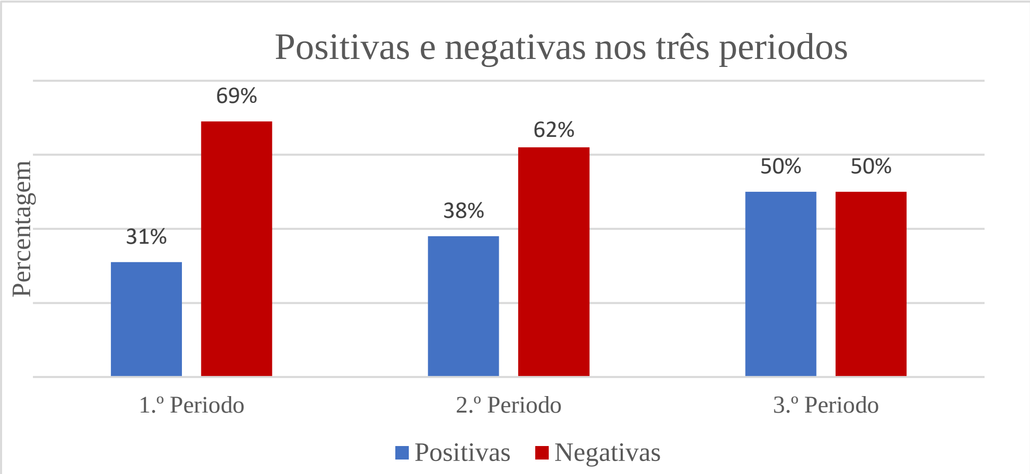


Figura 3.14 – Percentagem de positivas e negativas nos três períodos letivos do 10.º ano

3.6.2. Aulas lecionadas

Na turma do 10.º ano estavam previstas a lecionação de 3 aulas. O professor estagiário lecionou duas aulas no segundo período e a terceira seria lecionada no terceiro período, mas devido a falta de tempo disponível no horário da turma, optou-se por lecionar a terceira aula na turma do 12.º ano. As aulas foram supervisionadas pela orientadora de estágio Professora Rosário Lopes e pela Professora responsável do Estágio Pedagógico Doutora Maria Helena Santos, conforme se mostra na Tabela 3.7.

Tabela 3.7 – Calendarização das aulas supervisionadas na turma do 10.º ano

	Data	Duração	Domínio	Subdomínio	Supervisão
2.º Período	29/01/2019	100 minutos	GA10 Geometria Analítica	Geometria Analítica no Espaço	Prof. R. L. Prof. D.ª M. H. S.
	11/03/2019	100 minutos	FRVR10 Funções Reais de Variável Real	Generalidades acerca de Funções Reais de Variável Real	Prof. R.L. Prof. D.ª M. H. S.

3.6.2.1. Aula n.º 1

Planificação da aula

O professor estagiário pretendia abordar nesta aula as equações de planos paralelos aos planos coordenados e as equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos coordenados. Na elaboração do plano o professor considerou que seria importante propor aos alunos alguns exercícios de revisão sobre planos coordenados e coordenadas de pontos no espaço, que seriam importantes para uma melhor compreensão do que seria abordado na aula. Para a proposta dos exercícios o professor planeou utilizar uma metodologia diferente da habitual que consistia na utilização da ferramenta Plickers.

O Plickers (https://get.plickers.com) é uma aplicação direcionada para a avaliação formativa, que permite apresentar aos alunos questões de escolha múltipla ou verdadeiro/falso com o objetivo de proporcionar tanto o aluno como o professor uma visão mais completa da evolução das aprendizagens relativamente a um determinado assunto.

Na aula seria entregue a cada aluno um cartão (Figura 3.15 à esquerda), pessoal e intransmissível, com quatro opções de resposta. Os alunos leem uma questão, projetada através do retroprojetor, e selecionam a resposta que consideram estar certa, colocando o seu cartão na posição correspondente à resposta escolhida, virado para o professor. O smartphone ou tablet do professor faz a leitura das respostas (Figura 3.15 à direita) e apresenta em tempo real, graficamente, o número de respostas corretas e incorretas. A Figura 3.15 ilustra um exemplo de utilização da ferramenta Plickers.

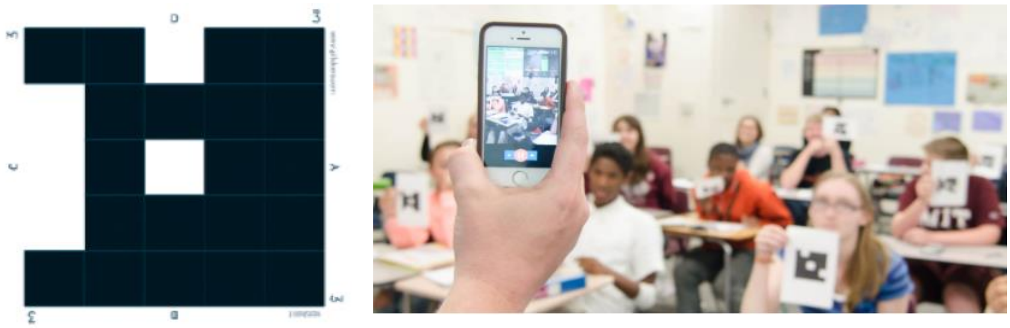


Figura 3.15 – Plickers. Figura à esquerda - cartão entregue aos alunos. Figura à direita - exemplo de utilização da ferramenta

Após a recolha de todas as respostas dadas pelos alunos, com o gráfico das respostas visível, o professor iria solicitar alguns dos alunos que escolheram uma das opções incorretas para justificarem as suas opções, individualmente ou em discussão com os colegas, de modo a perceberem onde o raciocínio falhou e descobrirem o raciocínio correto. Na escolha das questões teve-se a preocupação de estas não serem muito complexas para a recolha de um número significativo de respostas em tempo útil, e não muito fáceis, para que se fomente alguma discussão.

No seguimento da aula, o professor aproveitaria um dos exercícios propostos para solicitar aos alunos o preenchimento de uma tabela no quadro com vista à identificação das características comuns aos pontos pertencentes a cada um dos planos coordenados e das características comuns aos pontos pertencentes a um plano que seja paralelo a esse plano coordenado e consequentemente a indicação da equação dos planos. Utilizando o mesmo exercício, o professor iria recorrer ao Geogebra, para abordar as caraterísticas dos pontos de uma reta paralela a um dos eixos coordenados. Seriam traçadas retas paralelas aos eixos coordenados e que contêm uma das arestas de um cubo. Seleciona-se um ponto da reta e depois movimentá-la para os alunos visualizarem as caraterísticas dos pontos da mesma. Após as abordagens intuitivas, o professor generaliza os resultados através dos slides.

Na parte final da aula seriam propostos alguns exercícios do manual e um exercício final com a utilização da ferramenta Plickers para avaliar a compreensão dos alunos do que foi abordado na aula.

Execução da aula

O professor iniciou a aula começando por explicar o funcionamento do Plickers e a utilização dos cartões. Em seguida foram distribuídos os cartões aos alunos e foi projetada a primeira questão através do retroprojetor. Os alunos mostraram-se empenhados e interessados com a proposta do professor, todos leram a questão, escolheram a opção que acharam correta e colocaram o cartão que lhes foi distribuído na posição correspondente à resposta escolhida. No momento da recolha das respostas houve algumas falhas de internet no telemóvel do professor e este não conseguia recolher as respostas devidamente. Neste sentido o professor tomou a iniciativa de propor os exercícios de forma habitual e não foi utilizada a ferramenta durante toda a aula. Mesmo sem a utilização da ferramenta os alunos aderiram à realização dos exercícios, houve algumas discussões e foi necessária alguma explicação aos alunos com maiores dificuldades relativamente à identificação das coordenadas de pontos no espaço.

Tal como planeado, de seguida, o professor construiu uma tabela no quadro e solicitou aos alunos a indicação das coordenadas dos pontos dos vértices de um prisma que pertencem a um plano paralelo aos planos coordenados. Foram identificadas as características comuns a estes pontos e indicada a equação que define o plano, de forma intuitiva. Muitos alunos colaboraram, embora sejam quase sempre os mesmos. No caso da utilização do Geogebra para uma abordagem intuitiva das equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos coordenados, todos estiveram atentos, alguns participaram de forma eficaz, mas nem todos perceberam o que estava a ser explicado.

Os restantes momentos da aula decorrerem tal como tinha sido planeado, embora houvesse pouco tempo para os alunos consolidarem os conhecimentos com a resolução de exercícios. Por isso, alguns exercícios foram propostos como trabalho de casa.

Análise após a aula

Após a execução da aula, as professoras orientadoras apontaram alguns aspetos a melhorar:

- O professor falou várias vezes nos planos coordenados, mas nunca perguntou aos alunos se sabiam o que eram os planos coordenados.
- No primeiro exercício de revisão, era visível no enunciado um cubo e uma pirâmide em que a base coincidia com a face superior do cubo, mas no enunciado projetado não houve qualquer referência a essa informação. No mesmo exercício algumas opções de escolha múltipla foram mal elaboradas, permitindo que os alunos selecionem a opção correta de imediato e sem analisar as outras opções. Além disso, numa das alíneas do exercício era suposto exigir que os alunos utilizassem uma informação do enunciado sobre o volume do sólido para determinarem as coordenadas de um dos pontos, mas devido às opções de

escolha múltipla menos construídas, os alunos selecionaram a opção correta por exclusão de partes sem a necessidade de usar a informação.

- Durante a abordagem intuitiva das equações dos planos paralelos aos planos coordenados, foram usadas as coordenadas de quatro pontos que tinham algumas características em comum. Sendo que quatro pontos não eram suficientes para tirar a conclusão sobre a equação de um plano, faltou explicitar com mais clareza as conclusões retiradas. Deveria ter começado por chamar a atenção sobre a posição dos respetivos planos em relação aos planos coordenados.
- Após a experiência com o Geogebra o professor propôs um exemplo de aplicação, para eliminar as eventuais dúvidas na escrita das equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos coordenados. Apesar de ter aproveitado bem um dos exercícios de revisão para solicitar aos alunos a equação cartesiana de retas paralelas a um dos eixos coordenados, verificou-se que o professor pouco se referiu ao facto das retas serem a interseção de dois planos paralelos aos planos coordenados.

Um bom professor é aquele que reconhece os seus erros e dê lugar à reflexão quando sente que os seus ensinamentos não foram claros ou que faltaram argumentos para o esclarecimento das dúvidas dos alunos. O primeiro passo para a melhoria da sua prática, inicia-se com a reflexão que faz da sua própria prática. Durante a aula e após a sua execução o professor tomou plena consciência dos comentários feitos pelas professoras e sentiu-se um pouco constrangido ao considerar que não foi suficientemente claro na transmissão da matéria e partilhou esse desagrado com as professoras imediatamente após o término da aula. Reconhece-se que algumas opções de escolha múltipla dos exercícios propostos não foram produtivas, impossibilitando algumas discussões que poderiam surgir. Noutra perspetiva, destaca-se a utilização da ferramenta Plickers que poderia ter proporcionado uma boa dinâmica de aula e que inicialmente os alunos gostaram, mas que resultou numa situação com que os professores devem contar e ter sempre presente a necessidade de adaptar o plano de aula a situações imprevistas.

3.6.2.2. Aula n.º 2

Planificação da aula

No planeamento desta aula teve-se como ideia central a introdução do conceito de paridade de uma função. O professor planeou iniciar a aula com algumas revisões sobre o conceito de função real de variável real e relembrar que a mesma pode ser definida através da sua expressão analítica e do seu gráfico cartesiano. Outra preocupação fundamental do professor estagiário para a abordagem da paridade seria perceber de antemão qual é o nível de compreensão dos alunos sobre a simetria de reflexão e reflexão central do gráfico de uma função que seriam importantes para uma melhor compreensão das características do gráfico das funções pares e das funções ímpares. Nesta linha o professor iria propor uma atividade inicial como forma de rever estes conceitos.

Continuamente o professor recorria ao gráfico de uma função em que o eixo de simetria é o eixo das ordenadas e solicitaria aos alunos que indicassem as coordenadas de três pares de pontos simétricos com o objetivo de perceberem que os pares de pontos têm abcissas simétricas e a mesma ordenada. Em seguida apresentava as definições relativas à função par e propunha alguns exemplos e exercícios de esclarecimento de dúvidas. Quanto à abordagem das funções ímpares o professor recorria a um processo semelhante, recorrendo a um gráfico simétrico relativamente à origem do referencial.

No final da aula o professor iria entregar aos alunos uma folha impressa com alguns exercícios para efetuarem na aula e propor mais alguns exercícios do manual como trabalho de casa para a consolidação dos conceitos abordados.

Execução da aula

A aula decorreu dentro do que foi planeado pelo professor. Tal como era previsto fizeram-se as revisões necessárias, em especial os conceitos de simetria de reflexão e simetria de reflexão central. Apresentaram-se seis gráficos, dois gráficos em que o eixo das ordenadas era o eixo de simetria, em três gráficos a imagem pela reflexão central de centro na origem do referencial era o próprio gráfico e um dos gráficos não verificava nenhuma das situações. Tendo em conta as características da turma o professor estava à espera que houvesse dúvidas, mas não tão elementares ao nível dos conceitos de simetria. O professor pretendia rever sem grandes pormenores os conceitos referidos, mas não foi possível devido a várias solicitações para esclarecimento de dúvidas por parte dos alunos.

Assim como nas revisões a abordagem às funções pares e funções ímpares suscitou muitas dúvidas à turma e houve grandes discussões em torno de algumas observações importantes que o professor fez. Neste sentido os alunos mostraram-se interessados no esclarecimento das suas dúvidas, sendo que algumas vezes as explicações não foram suficientemente claras de forma a que os alunos pudessem superar essas dúvidas e também houve alguma falta de oportunidade dada aos alunos para manifestarem as suas opiniões.

Devido às inúmeras dúvidas apresentadas pelos alunos, a necessidade de as esclarecer e às discussões durante a aula, só houve tempo para a resolução de um dos exercícios da ficha entregue e os restantes foram enviados para casa.

Análise após a aula

No final da aula o professor reuniu com as professoras que teceram alguns comentários sobre a aula lecionada pelo professor estagiário. Ouve vários aspetos da aula que os alunos não perceberam e que não houve devida explicação por parte do professor. Foi apresentada uma função com domínio $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, alguns alunos não perceberam bem porque é que o domínio era esse e devia ter explicado. Durante a proposta dos exemplos de revisão alguns alunos perceberam, mas outros nem sequer sabiam o que era a simetria de reflexão e a simetria de reflexão central. Embora tenha sido questionado aos alunos se sabiam, a explicação não foi a melhor, principalmente da reflexão central. Uma aluna perguntou porque é que um dos gráficos era simétrico em relação à origem do referencial, o professor marcou um ponto numa parte do gráfico e marcou o seu simétrico na outra parte do gráfico e não deviria ter explicado dessa forma porque não se pode ter a certeza de que eram simétricos. Embora a aluna tenha percebido, seria mais claro se tivesse traçado uma reta que passa na origem e que intersetasse o gráfico em dois pontos, e constatar que eram simétricos em relação à origem do referencial ou então frisar que a origem do referencial é o ponto médio do segmento que une os dois pontos. Outro aluno perguntou como se pode ter a certeza que o gráfico era simétrico em relação ao eixo das ordenadas e não em relação ao eixo das abcissas, o professor tentou esclarecer a dúvida, mas não ficou muito claro. Talvez o aluno tivesse ficado mais esclarecido se tivesse explicado que se o gráfico fosse simétrico em relação ao eixo das abcissas nem sequer seria o gráfico de uma função.

Quando foi apresentada a definição de função par, era importante chamar de imediato a atenção dos alunos para a verificação da condição $\forall x \in D_f, -x \in D_f$, o professor só frisou isso mais adiante na resolução de um exercício. Além disso, havia um ótimo exemplo para esclarecer esse assunto e que estava incluído no plano de aula, mas o professor, face a tanta solicitação dos alunos, acabou por não abordar esse exemplo.

Quando foi abordado as características do gráfico de uma função ímpar, a ideia de traçar uma reta que passasse na origem do referencial e que intersetasse o gráfico em dois pontos seria mais benéfica para a compreensão dos alunos de que esses dois pontos de intersecção são simétricos em relação à origem do referencial. Ainda nessa abordagem o professor frisou várias vezes que se uma função for ímpar e 0 pertencer ao domínio dessa função, então o ponto (0,0) pertence sempre ao gráfico dessa função, mas era importante dizer oralmente que se tratava de uma função ímpar.

Verificou-se, uma vez mais a dificuldade do professor em dar oportunidade aos alunos para expressarem as suas ideias. Ou seja, quando o professor coloca uma questão, por vezes, responde de imediato sem dar tempo aos alunos e isso é um dos aspetos que deve ter mais atenção e que precisa melhorar.

Houve também alguns aspetos positivos referidos pelas professoras. Um dos alunos não percebia bem quando é que um conjunto de pontos representa o gráfico cartesiano de uma função e o professor esclareceu bem a dúvida do aluno a partir da representação de um gráfico no quadro. O exercício de revisão para a identificação de gráficos simétricos em relação ao eixo das ordenadas e em relação à origem do referencial foi muito bem pensada pelo professor estagiário.

As ilações das professoras permitiram analisar que há sempre aspetos que o professor deve ter em conta e que deve preparar a sua aula da melhor forma possível de modo a atender às especificidades dos seus alunos. A capacidade do professor de antecipar as dúvidas é fundamental nesse processo. Embora a proposta da atividade inicial tenha sido bem pensada, reconhece-se que o professor nem sempre identificou todas as dificuldades dos alunos, uma vez que não as havia previsto.

Algumas opções não foram executadas pelo professor ou alguns aspetos não foram explicados com mais pormenores porque se considerou que os alunos não teriam tantas dificuldades.

3.6.3. Avaliação

Os critérios de avaliação em cada um dos períodos na turma do 10.º ano basearam-se em 70% dos testes sumativos, 20% das fichas de avaliação/trabalhos individuais e/ou de grupo, 5% do trabalho, participação e comportamento em aula e 5% dos trabalhos realizados em casa. No que respeita aos instrumentos de avaliação, a turma realizou ao longo do ano letivo:

- um teste diagnóstico no início do ano letivo;
- seis testes sumativos, dois em cada período;
- uma ficha de avaliação no primeiro período e duas no segundo período.

No terceiro período também foi realizado um trabalho de grupo, contribuindo com uma cotação inferior ou igual a 0,4 valores na nota final.

3.7. A turma do 12.º ano

3.7.1. Descrição

No início do ano letivo havia 23 alunos inscritos na turma do 12.º ano. Esse número reduziu para 19 alunos, porque dois alunos pediram transferência antes de frequentarem a turma, outra aluna pediu transferência a meio do ano letivo e um dos alunos embora seja assistente a repetir o 12.º ano, faltou à maioria das aulas. Em janeiro de 2019, doze alunos tinham 17 anos e sete alunos 18 anos. A maioria dos alunos tinha nacionalidade portuguesa, com exceção de dois alunos, uma moldava e outro brasileiro.

A turma do 12.º ano revelou-se bastante heterogénea relativamente ao desempenho escolar ao longo do ano letivo 2018-2019. A maioria dos alunos da turma teve uma classificação entre 10 e 13 valores ao longo dos três períodos. Verificou-se também que o número de alunos com classificação negativa diminuiu, em contrapartida houve um aumento da classificação entre 14 a 16 valores nos três períodos. Quanto ao nível 17 a 20, foi atingida por duas alunas no primeiro período e pela melhor aluna da turma no segundo e terceiro período que terminou o ano letivo com uma classificação de 19 valores. A Figura 3.16 mostra a distribuição dos alunos pelos diversos níveis nos três períodos.

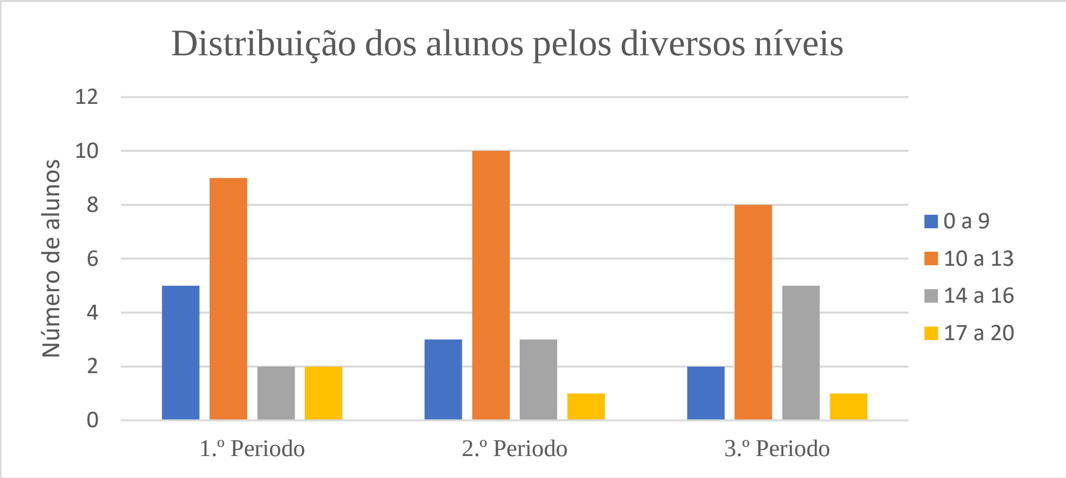


Figura 3.16 – Distribuição dos alunos pelos diversos níveis nos três períodos letivos do 12.º ano

3.7.2. Aula lecionada

Na turma do 12.º ano apenas estavam previstas a assistência a algumas aulas, mas devido à falta de horários disponíveis na turma do 10.º ano, optou-se pela lecionação, no terceiro período, de uma aula nesta turma.

O tema da aula versou sobre a resolução de equações polinomiais do 2.º grau impossíveis em $\mathbb{R}$ que integram o domínio números complexos do programa curricular do ensino secundário. A aula tinha uma duração de 50 minutos e decorreu no dia 28 de maio de 2019, tendo sido assistida pela professora orientadora Rosário Lopes.

Planificação da aula

No dia previsto para a execução da aula a turma tinha dois tempos, sendo que o primeiro tempo seria lecionada pela professora titular e o segundo tempo pelo professor estagiário. Na elaboração do plano de aula o professor propunha começar a aula com a resolução de um exercício do manual para a obtenção das raízes quadradas de um número complexo. Em seguida, salientar que os números negativos admitem duas raízes quadradas no conjunto dos números complexos.

No seguimento da aula o professor propunha a resolução de uma equação do segundo grau completa em que o binómio descriminante era negativo como forma de chamar a atenção para a existência de duas soluções complexas conjugadas da equação, visto que, o binómio descriminante apesar de ser negativo admite duas raízes quadradas em $\mathbb{C}$. Em seguida o professor escrevia no quadro a informação sobre a resolução de uma equação do 2.º grau do tipo $az^2 + bz + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ em que o binómio descriminante é negativo para os alunos copiarem para o caderno diário.

A parte final da aula era dedicada à resolução de equações de grau superior ou igual a dois, bem como, equações que envolviam o conjugado, como por exemplo, $z^2 + 2\bar{z} = 0$. As equações envolvendo o conjugado serviria também para chamar a atenção dos alunos acerca do número de soluções que podem ter. A equação apresentada embora pareça uma equação do segundo grau tem mais do que duas soluções. Também chamar atenção que estas resolvem-se, não pela fórmula resolvente, mas sim pela igualdade de números complexos.

Execução da aula e considerações

A execução da aula decorreu como planeado. Durante a aula os alunos procuraram participar e atender às solicitações do professor estagiário, embora com algumas dúvidas principalmente na resolução de equações envolvendo o conjugado. O professor optou por resolver no quadro algumas equações que suscitaram maiores dificuldades nos alunos e solicitando sempre que possível a participação dos mesmos. Alguns exercícios que não foram resolvidos na aula foram enviados como trabalho de casa.

No final da aula a professora orientadora disse que não tinha comentários a fazer e que a aula tinha corrido de acordo com o planificado não existindo falhas que merecessem destaque. No entanto, a execução desta aula permitiu ao professor estabelecer algumas comparações entre as três turmas. Como seria de esperar, nesta turma, dada a maturidade dos alunos, a aula foi mais tranquila em comparação com as aulas lecionadas nas turmas do 9.º e 10.º ano. A semelhança entre as três turmas está relacionada com as dificuldades que alguns alunos têm na disciplina, bem como, a capacidade de trabalho dos alunos que em geral dificultam a execução pedagógica dos professores e comprometem, por vezes, o cumprimento dos objetivos previstos.

3.7.3. Avaliação

A avaliação em cada um dos períodos na turma do 12.º ano atendeu aos seguintes critérios:

- 85% da nota final corresponde aos testes de avaliação sumativa;
- As fichas de avaliação/trabalhos individuais e/ou de grupo têm um peso de 10% na nota final;
- Os trabalhos realizados em casa e na aula, bem como, o empenho e participação têm um peso de 5% na nota final.

No que concerne aos instrumentos de avaliação, a turma realizou ao longo do primeiro período um teste diagnóstico no início do ano letivo, dois testes sumativos, uma ficha de avaliação e um teste de recuperação. Já no segundo período foram realizados dois testes de avaliação, uma ficha de avaliação, uma questão aula formativa e um trabalho de grupo integrado no trabalho desenvolvido pelo professor estagiário que acompanhou a turma. Quanto ao terceiro período, realizou-se dois testes de avaliação e uma questão aula. Apesar dos instrumentos de avaliação referidos anteriormente, foi ainda realizada um trabalho de grupo contribuindo com um acréscimo inferior ou igual a 0,4 valores na nota final.

3.8. Atividades não letivas

A atividade de estágio engloba, além da prática letiva, a dinamização de um conjunto de atividades extracurriculares na escola onde decorreu o estágio e a participação em reuniões do departamento de Matemática e conselhos de turma. O núcleo de estágio, composto por três professores estagiários, dinamizou algumas atividades envolvendo alunos do 7.º ao 12.º ano. O *workshop* de calculadoras e o dia da Matemática foram as principais atividades desenvolvidas pelos professores estagiários.

3.8.1. *Workshop* de calculadoras

O *workshop* de calculadoras decorreu no dia 17 de janeiro de 2019 numa das salas da escola com uma duração de 50 minutos. Foi dirigida aos alunos do 11.º ano que frequentavam a disciplina de Matemática A e Físico-Química. Estiveram presentes na sessão mais de 30 alunos que foram divididos em três grupos conforme o modelo de calculadora, sendo que cada grupo foi associado a um professor estagiário. As marcas das calculadoras eram *Texas NSpire*, *Texas Ti 83/84* e *Casio FX CG*. O *workshop* tinha como objetivo a exploração das capacidades das calculadoras de modo a incutir nos alunos a importância da sua manipulação, o uso regular e colmatar algumas dificuldades das professoras do grupo de Matemática em sala de aula, na gestão dos diferentes modelos.

Para a realização do *workshop* foi elaborada uma tarefa com uma componente exclusivamente prática, incluindo procedimentos básicos, especificamente a manipulação da janela gráfica da calculadora, a exploração do gráfico de uma função mediante a determinação de mínimos, máximos e zeros e a interseção de funções.

Durante o *workshop* foram notórias algumas dificuldades dos alunos em manipular a calculadora, uma vez que não resolveram a tarefa de forma autónoma. Mesmo para os que já usavam a calculadora de forma habitual, houve a necessidade de ensinar a explorar algumas funções da calculadora. Por outro lado, esta iniciativa revelou-se bastante importante para os participantes, porque manifestaram que aprenderam um pouco mais sobre a utilização da calculadora e que gostaram da sessão.

3.8.2. O Dia da Matemática

O Dia da Matemática é uma iniciativa de divulgação da Matemática na ESAG que decorreu no dia 9 de maio. Com o objetivo de abranger todos os alunos da escola, o núcleo de estágios preparou um conjunto diversificado de atividades que pudessem motivar a adesão de um número significativo de alunos. Assim, foram propostas duas atividades lúdicas: "Desafios Matemáticos" e "Um matemático em cada porta" e duas conferências: conferência MathGurl, dinamizada pela *youtuber* Inês Guimarães e a conferência "Matemática e Biodiversidade" moderada pelo Professor Doutor Jorge Orestes Cerdeira do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia.

3.8.2.1. Desafios matemáticos

Para a divulgação dos desafios matemáticos foram fixados alguns cartazes com alguns desafios nos corredores da escola (Figura 3.17). Os desafios eram uma espécie de concurso realizado *online* através de um formulário do Google, onde os alunos poderiam responder a 22 questões, dos quais 20 de escolha múltipla e duas de resposta aberta. Os alunos podiam responder ao formulário até dia 8 de maio e tinham acesso ao mesmo através da leitura de um *QR CODE* em cada um dos cartazes afixados, utilizando um telemóvel. A cada uma das questões estava associada uma pontuação, 1, 2 ou 3 pontos conforme o grau de dificuldade, com exceção de duas perguntas bónus que valiam 6 pontos. O concurso abrangia todos os alunos da escola e quem conseguisse acumular o maior número de pontos recebia como prémio no dia 9 de maio, o livro MathGurl intitulado "Desafios Matemáticos que te vão Enlouquecer".

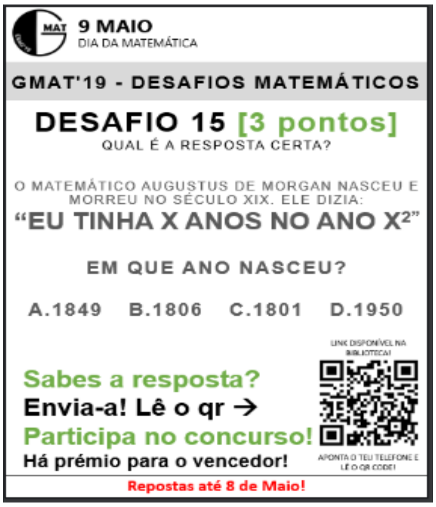


Figura 3.17 – Cartaz de divulgação dos desafios matemáticos

3.8.2.2. Um matemático em cada porta

Na atividade "um matemático em cada porta", foram afixados no dia 2 de maio, 80 cartazes, um em cada uma das portas da escola, com a figura de 40 matemáticos que foram importantes na história da Matemática, incluindo homens e mulheres. Cada cartaz apresentava um *QR CODE* que podia ser lida através de um telemóvel e este direcionava os alunos para uma página da internet com informações sobre o respetivo matemático a respeito do seu contributo na história da Matemática. A Figura 3.18 ilustra um dos cartazes que foram afixados.

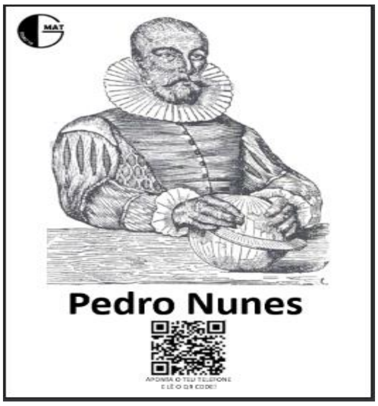


Figura 3.18 – Cartaz com a figura do matemático Pedro Nunes

3.8.2.3. Conferência MathGurl

A ideia da conferência MathGurl partiu de um colega de estágio, tendo sugerido que convidássemos a Inês Guimarães a vir à escola. Para a divulgação foram espalhados vários cartazes pela escola como se mostra na Figura 3.19. A conferência decorreu no dia 9 de maio no ginásio da escola e era direcionada aos alunos do 3.º ciclo, na qual participaram cerca de 160 alunos.

A Inês Guimarães é uma *youtuber* ligada a vários projetos de divulgação da Matemática que tem vindo a encantar os seus seguidores com vários vídeos no *YouTube*. Tornou-se numa das *youtubers* mais famosas de Portugal e o seu canal do *YouTube* com o título "MathGurl" tem mais de

80 mil seguidores. O entusiasmo e a linguagem acessível que utiliza na divulgação da Matemática, mereceu o seu destaque e o convite para dinamizar uma das conferências do Dia da Matemática.

No início da conferência, duas alunas do 12.º ano apresentaram um vídeo tutorial que elaboraram na aula de Matemática, através do projeto de investigação do professor estagiário Frederico Amaral. Após a apresentação das alunas, a Inês Guimarães apresentou-nos alguns desafios matemáticos envolvendo a participação dos alunos presentes e destacando a importância da Matemática no desenvolvimento das outras ciências. Destacam-se algumas frases proferidas pela Inês durante a sua apresentação: “Simplesmente quero mostrar-vos que a Matemática é realmente uma área muito diversa e que pode ser divertida”, “o teorema de Pitágoras é tão válido há 5000 anos, como vai ser daqui a 50000 anos quando já estivermos todos em decomposição e esse é um dos motivos pelos quais eu gosto de Matemática, é uma área que me faz sentir segura”.

Figura 3.19 – Cartaz de divulgação da conferência MathGurl

3.8.2.4. Conferência Matemática e Biodiversidade

Para dinamizar a conferência Matemática e Biodiversidade o núcleo de estágio convidou o professor do Departamento de Matemática da FCT, Doutor Jorge Orestes Cerdeira. Esta conferência foi pensada para os alunos dos 10.º, 11.º e 12.º anos que frequentavam a disciplina de Biologia e MACS. Foi divulgada pelos estagiários mediante a afixação de cartazes como o da Figura 3.20. Decorreu no dia 9 de maio, pelas 12h20, na sala E4 da escola. Estiveram presentes cerca de 60 alunos.

O tema da conferência “Matemática e Biodiversidade” surgiu na reunião do grupo disciplinar a 20 de setembro, mas também está ligada à década da ONU para a biodiversidade, cujo objetivo é integrar e promover a biodiversidade em diferentes níveis.

O professor Jorge Cerdeira apresentou a conferência de forma muito dinâmica e interativa e os alunos aderiram bastante, sobretudo os alunos de MACS que responderam a algumas perguntas do professor. Foram apresentados vários exemplos de utilização de grafos na resolução de problemas relacionados com a Biologia e Ecologia.

Figura 3.20 – Cartaz de divulgação da conferência do professor Jorge Orestes Cerdeira

Uma das frases do professor que marcou a conferência aquando da resolução de um problema difícil de cobertura mínima foi: O matemático diz: “Vamos lá analisar o que se passa com esse problema. O que acontece é que encontrar coberturas mínimas é um problema difícil. Em Matemática a definição de ser difícil é que um problema é difícil se o construirmos tão difícil quanto o problema é difícil. Para vos convencer que o problema é difícil, eu preciso arranjar um problema difícil para mostrar que este problema é tão difícil quanto o problema é difícil”.

3.8.3. Reuniões assistidas

Ao longo do ano foram assistidas algumas reuniões pelo professor estagiário. A reunião geral de professores decorreu no início do ano letivo e reuniu todos os professores do agrupamento onde foram transmitidas as informações gerais que se consideram importantes para o ano letivo.

O professor estagiário participou nas reuniões do conselho de turma no final do primeiro e do segundo período onde se formalizou as avaliações de todas as disciplinas e discutidas algumas estratégias que deveriam ser utilizadas para eliminar as dificuldades apresentadas pelos alunos. As reuniões foram presididas pela diretora da turma do 9.º ano e com a participação de todos os professores da turma. A ordem dos trabalhos incidiu essencialmente na validação das classificações de cada um dos alunos relativamente a cada uma das disciplinas para eventuais correções, caso existam e a indicação de algumas atividades extracurriculares da turma.

Foram também assistidas algumas reuniões do grupo disciplinar que decorriam às quintas-feiras, pelas 16h20. Nestas reuniões eram discutidas as planificações anuais de alguns anos de escolaridade, as aprendizagens essenciais para os 7.º e 10.º anos e as propostas de atividades que se pretendiam dinamizar, no âmbito do plano anual de atividades.

Quanto às reuniões de pais ou encarregados de educação, o professor estagiário participou na reunião que decorreu no início do terceiro período. A diretora de turma prestou algumas informações sobre a situação escolar dos alunos, bem como todas as informações relacionadas com o exame nacional. Nessa reunião o professor estagiário aproveitou para falar com os pais sobre o seu projeto de investigação para a tese de mestrado. Foi possível perceber a preocupação dos pais ou encarregados de educação relativamente aos resultados escolares dos filhos, bem como a manifestação de algumas preocupações relativamente à forma como decorrem as aulas de algumas disciplinas.

4. Reflexão global da atividade de estágio

O estágio pedagógico foi, sem margem para dúvidas, o acontecimento mais marcante de todo o meu percurso académico, tendo possibilitado a aplicação de conhecimentos e aprendizagens que serão indispensáveis no meu futuro enquanto professor. A oportunidade de interagir com a comunidade escolar, em especial os alunos, o conhecimento da realidade da sala de aula, as aulas assistidas, a elaboração dos planos de aula, a lecionação dos conteúdos, a análise das aulas lecionadas e a participação em atividades extracurriculares, que irão fazer parte da minha vida profissional, foram sem dúvida uma mais-valia para o exercício das minhas funções enquanto futuro docente.

A observação das aulas lecionadas pela professora traduziu-se num dos momentos mais importantes da atividade de estágio. Observar as diversas estratégias implementadas pela professora, para facilitar a assimilação dos conteúdos por parte dos alunos, permitiu compreender a pertinência destas estratégias na aquisição correta dos conceitos pelos mesmos. A professora tinha uma preocupação constante sobre a aquisição de conhecimentos dos alunos, tendo sempre o cuidado de esclarecer da melhor forma possível as dúvidas dos alunos e ter a certeza de que eles compreenderam o que foi transmitido, repetindo muitas vezes alguns conceitos que, de acordo com a sua experiência, suscitam mais dificuldades aos alunos e onde estes cometem erros muito frequentemente, recorrendo a uma linguagem científica rigorosa e apropriada a cada uma das turmas. Além disso, incutia nos alunos a importância do trabalho autónomo, de modo a potenciar o conhecimento e superação das dificuldades que estes revelam. Por outro lado, foi uma constante, a abordagem da professora relativamente ao exame nacional, referindo a necessidade de tranquilizar os alunos para o mesmo, quer relativamente aos conteúdos que poderão surgir no exame, assim como uma referência ao cuidado dos alunos na utilização correta das linguagens simbólicas.

Outro aspeto de grande relevância na observação das aulas é a capacidade de gestão da aula, algo que é muito difícil de se conseguir, sendo esta uma das dificuldades que revelei aquando da lecionação das aulas e que necessito de melhorar. Observou-se o equilíbrio que a professora conseguia manter entre os momentos teóricos e práticos de cada aula e também o equilíbrio da professora mediante os comportamentos dos alunos, recorrendo a algumas estratégias para repor a ordem na turma e mantê-los focados na aula.

Assistir a aula ao lado dos alunos teve outra vantagem, na medida, em que permitiu perceber as atitudes dos alunos face aos diversos comportamentos dos mesmos na sala de aula. Quando estamos a lecionar nem sempre é fácil perceber o que se passa entre os alunos, muitas vezes, por causa do maior foco que depositamos nos conceitos que estamos a transmitir. No decorrer do estágio apercebi-me que alguns alunos aproveitavam o facto de a professora estar a escrever no quadro para atirar objetos e fazer piadas, mas que a professora muitas vezes conseguia identificar. Nas aulas em que lecionei, não consegui identificar alguns comportamentos dos alunos, tendo os mesmos sido identificados pela professora orientadora enquanto supervisionava as minhas atuações. Esta metodologia fez-me entender que os professores têm uma melhor perceção dos acontecimentos que se desenrolam numa sala de aula quando estão na posição dos alunos (como espetadores e com intervenção menos residual), sendo que essa consciência é importante para os professores, uma vez que lhes permite ter um maior controlo durante a sua prática. Além disso, enquanto observava as aulas na turma do 9.º ano apercebia-me da falta de interesse de alguns alunos no cumprimento dos seus deveres na sala de aula, como por exemplo, o registo dos conteúdos no caderno diário que, apesar da professora chamar a atenção e referindo as consequências, esses alunos mantinham essa postura.

Para a minha aprendizagem, destacam-se a importância dos aspetos referidos acima e que procurarei pôr em prática, como forma de melhoria do meu exercício profissional no futuro. O conhecimento de toda a realidade da sala de aula, ambiente natural de um professor, é de facto um aspeto crucial na sua formação.

O estágio proporcionou-me também a aquisição de experiências na elaboração dos planos de aula. Inicialmente foram muitas as dificuldades na estruturação do plano de aula, mas que foram sendo melhoradas ao longo do estágio, tendo contribuído para tal os comentários da professora orientadora. O plano de aula é efetivamente um elemento bastante relevante no apoio à execução das aulas, pois através da sua construção foi possível preparar aos pormenores as estratégias implementadas de modo a evitar alguns constrangimentos no desenvolvimento da aula. Por isso, dediquei-me imenso, procurando diversificar as estratégias de modo a proporcionar aos alunos momentos únicos de aprendizagem, recorrendo a várias ferramentas tecnológicas, em especial a ferramenta Socrative que melhorou a forma como os alunos trabalhavam na sala de aula e em casa.

De facto, Ponte, Quaresma e Ferreira (2015) consideram que uma boa aula depende de vários fatores tais como, boa preparação, forte inspiração por parte do professor e também o interesse e disponibilidade dos alunos. Referem ainda que, mediante a preparação de cada unidade didática o professor tem em conta os seus alunos, as suas capacidades, interesses e disposição para se envolverem no trabalho em Matemática e daí a importância de uma preparação adequada da aula.

As aulas lecionadas por mim foram a melhor experiência que poderia ter tido enquanto professor estagiário. Em todas as aulas procurei seguir o que foi planeado na elaboração do plano de aula, considerando a hipótese de tomar decisões para dar resposta a situações inesperadas que poderiam surgir no decorrer da aula.

Em cada uma das aulas lecionadas sentia-me entusiasmado, embora tivesse algum receio na exposição de alguns conteúdos e houvesse duas professoras a supervisionar a minha atuação na aula, não me sentia muito nervoso. O facto de estar perante uma turma, embora não fosse minha, foi uma sensação única. No entanto, após o final de algumas aulas o entusiamo já não era o mesmo, por considerar em alguns momentos que a minha intervenção não tivesse sido significativa para a aprendizagem dos alunos. De facto, essa preocupação deixou-me um pouco perturbado porque tencionava lecionar e sentir que as dúvidas dos alunos fossem totalmente esclarecidas. Contudo, devido à minha falta de experiência, muitos aspetos não ocorreram da forma como pretendia. Todavia, o reconhecimento das minhas falhas não deixa de ser importante para a minha aprendizagem e são o primeiro passo para a melhoria da prática pedagógica.

Foram muitos os aspetos que fui melhorando ao longo do estágio e outros que ainda terei a oportunidade de melhorar e pôr em prática. Um dos aspetos a melhorar é a capacidade de rigor na abordagem de alguns conceitos. Enquanto explicador de Matemática não tive a oportunidade de efetuar uma análise detalhada que permitisse identificar as situações em que a utilização de linguagem mais coloquial, com o objetivo de facilitar a compreensão dos conceitos por parte dos alunos, possa ter descurado a necessidade de manter o rigor científico, talvez por não ter ninguém que observasse as minhas lições e me ajudasse a fazer uma apreciação mais rigorosa acerca do meu desempenho, como ocorreu ao longo das aulas que lecionei no decurso do estágio. Neste sentido, após a análise dos comentários das professoras, tomei consciência que há certos aspetos científicos que fazem muita diferença e que nos passam despercebidos com o prejuízo de podermos induzir os alunos em erro.

A diversificação de estratégias de ensino-aprendizagem nas aulas lecionadas foram absolutamente notáveis, não só para a minha própria aprendizagem, como também no interesse e envolvimento dos alunos. Considero que a estratégia da abordagem histórica relativamente a um conceito melhorou bastante a capacidade de concentração dos alunos, enquanto que a utilização da ferramenta Socrative melhorou o interesse dos alunos relativamente aos trabalhos em aula e em casa. Ver a forma como os alunos se envolveram nos trabalhos foi contagiante e deixou-me mais motivado. Porém, tendo em conta que a execução das estratégias ocorreu em poucas aulas, envolvendo apenas alguns conteúdos e que o interesse dos alunos pode ser algo passageiro, não é possível afirmar que as estratégias utilizadas possam resultar em outros momentos (contextos) ou mesmo aferir que a aprendizagem foi mais eficaz.

No que se refere aos comentários das professoras relativamente à execução das aulas, estes foram fundamentais, tendo proporcionado uma análise de vários aspetos que me tornou melhor enquanto professor. Reconheço que tive algumas dificuldades em melhorar alguns aspetos referidos pelas professoras, sobretudo a organização do quadro e a oportunidade que devia ter dado aos alunos com mais frequência para manifestarem as suas opiniões, de modo a promover interações professor-aluno.

A participação nas atividades não letivas favoreceu o contacto com os alunos e o conhecimento do trabalho desenvolvido pela área disciplinar, pelo conselho de turma e pela direção de turma. A participação nas diversas reuniões revelou-se importante na organização e gestão escolar. Quanto às tarefas inerentes à direção de turma, o conhecimento das mesmas consciencializou-me do trabalho árduo de que é sujeito um(a) diretor(a) de turma e da importância desse trabalho na vida escolar dos alunos e no estabelecimento de laços entre a escola e os pais ou encarregados de educação.

Globalmente, todo o trabalho desenvolvido no âmbito do estágio foi essencial no desenvolvimento pedagógico enquanto futuro professor. Lecionar a disciplina de Matemática não é uma tarefa fácil, principalmente quando os alunos são desinteressados, têm falta de autonomia, pouca maturidade e responsabilidade face à aprendizagem, mas é um desafio que me propus abraçar. No início do estágio, pouco conhecia sobre a realidade da sala de aula de Matemática, não obstante, por toda a experiência desenvolvida poderei dizer que terminei o estágio mais rico em conhecimentos pedagógicos.

Parte II – Projeto de Investigação

1. Introdução

A presente investigação envolveu alunos de uma turma do 9.º ano de escolaridade pertencente a uma escola secundária do concelho de Almada. O objetivo desta investigação consiste em analisar se os alunos do 9.º ano conseguem explorar diversos processos de resolução de uma tarefa, de forma assertiva e flexível, e identificar os principais fatores que interferem com esse processo. Foi disponibilizado aos alunos um conjunto de questões com mais do que uma possibilidade de resolução, envolvendo o tópico curricular circunferência, com intuito de analisar e compreender a flexibilidade procedimental dos alunos quando tentam explorar vários processos de resolução de uma determinada questão.

O projeto encontra-se estruturado em seis capítulos. O presente capítulo é dedicado à apresentação das motivações pessoais e pertinência do estudo, referindo ainda os objetivos e as questões de investigação. O segundo capítulo corresponde ao enquadramento teórico sobre a temática em estudo, onde são apresentados alguns trabalhos realizados por outros autores que são considerados relevantes para o presente trabalho. Quanto ao terceiro capítulo, realça as opções metodológicas utilizadas, ou seja, as opções assumidas, os instrumentos utilizados para a recolha dos dados e a maneira como os mesmos foram recolhidos em função dos objetivos que se pretendem alcançar com o estudo. O quarto capítulo é dedicado à apresentação dos dados recolhidos durante a implementação do estudo. No que respeita ao quinto capítulo, apresentam-se as conclusões deduzidas a partir dos dados analisados.

1.1. Motivações pessoais e relevância do estudo

Quando frequentava o ensino básico em Cabo Verde, recebia vários elogios dos professores pelos resultados que tinha nos testes de Matemática, mas para mim a disciplina era igual às outras, isto é, não tinha preferência, apenas gostava de estudar qualquer disciplina que fosse. Descobri a minha paixão pela Matemática no Ensino Secundário. Na altura era frequente competir (de forma saudável) com um colega, nos testes de Matemática. Esses desafios despoletaram o meu gosto pela Matemática. Muitas vezes dava explicações de Matemática aos meus colegas e alunos que frequentavam outros anos de escolaridade. Fui assim alimentando cada vez mais o meu gosto pela disciplina e pelo ensino. Quando conclui o 12.º ano decidi que era este o caminho que queria continuar a percorrer. Deste modo, a minha primeira opção, quando me candidatei a um curso do ensino superior em Portugal, foi a licenciatura em Matemática, com o objetivo de vir a ser professor.

Ao longo da componente do estágio, observei que os alunos resolviam uma determinada questão seguindo sempre o mesmo procedimento. Quando eram confrontados com a existência e exploração de outros processos de resolução revelavam algumas dificuldades nessa abordagem. Por outro lado, verifiquei que existiam alguns obstáculos na forma como justificavam um determinado procedimento na resolução de tarefas e em relação ao nível de eficácia que atribuem a uma determinada estratégia.

Uma das principais razões das dificuldades de aprendizagem em Matemática é que queremos que os alunos entendam Matemática e que sejam eficientes solucionadores de problemas, mas muitos alunos ainda demonstram um pensamento rotineiro (Hiebert, 2003; Lithner, 2008). "Mesmo que a aprendizagem dos procedimentos de rotina não esteja focada na aprendizagem mecânica, grande parte dos alunos seguem regras como robôs com memórias pobres" (Hiebert, 2003, p. 12). O ensino da Matemática deve ser visto como uma compreensão conceptual, que desenvolve a capacidade de aplicação de conteúdos com flexibilidade e critérios, e não como um mero desenvolvimento de competências mecânicas (Vilanova *et al.*, 2011).

De acordo com Star (2005), todos os alunos precisam ter um conhecimento profundo e flexível de uma variedade de procedimentos e em simultâneo a capacidade de fazer julgamentos críticos sobre que procedimentos ou estratégias são mais apropriados em determinadas situações.

Cada vez mais, a proficiência em Matemática é considerada mais do que apenas capacidade. Envolve uma integração de capacidade e compreensão que permite o uso flexível, adaptável e apropriado de algoritmos, que contribuem para a eficiência, resolução de problemas e transferência de ideias para novas situações (Baroody & Dowker, 2003; NRC, 2001).

Booth *et al.* (2013) defendem a importância da análise dos procedimentos dos alunos na resolução de uma tarefa, uma vez que os mesmos revelam as dificuldades de assimilação de determinados conteúdos, ajudando assim, os professores a planificar e melhorar a sua prática. Da mesma forma, essa análise permite que os professores entendam como os alunos analisam a eficácia ou não de um determinado procedimento, e identifiquem qual procedimento pode ser mais apropriado numa dada situação.

Durante a pesquisa sobre a flexibilidade procedimental em Matemática deparei-me com algumas dificuldades em encontrar estudos elaborados nesse campo, sobretudo de âmbito nacional. De facto Star (2005) refere que o desenvolvimento do conhecimento procedimental dos alunos não tem sido um foco recente de investigação em educação Matemática, pelo facto do termo ser pouco desenvolvido. Segundo Star e Newton (2009), as investigações existentes sugerem que a flexibilidade pode ser melhorada através de um ensino apropriado, mas é preciso muito mais investigação para entender completamente o desenvolvimento da flexibilidade. Tendo em conta a escassez de informação e as dificuldades que os alunos manifestam, a importância do estudo da flexibilidade tornou-se relevante efetuar este estudo de modo a contribuir para a melhoria da prática dos professores e de forma a dar o meu contributo à comunidade de investigadores em educação Matemática.

Uma das principais razões para a escolha da geometria para este estudo é o papel central que esta assume no dia a dia, a importância da sua aprendizagem no contexto da educação Matemática e a necessidade do desenvolvimento de estudos nos vários domínios dessa área. De facto, Rodrigues e

Bernardo (2011) salientam que a geometria continua a ser uma área carente de investigação, onde os resultados de estudos empíricos devem ser acolhidos no sentido de uma compreensão mais aprofundada da forma como se desenvolve o raciocínio geométrico dos alunos. De acordo com Battista (2007), a geometria é uma área onde os alunos revelam dificuldades de diversa ordem, pelo que justifica a pertinência da investigação incidente na mesma. Além disso, o NCTM (2008) aponta para a importância do desenvolvimento da visualização e do raciocínio espacial como propósito principal do ensino da geometria. O raciocínio espacial segundo Battista (2007), prende-se com "a capacidade de 'ver', examinar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações", envolvendo gerar e analisar imagens, transformar e operar com imagens, e colocá-las ao serviço de outras representações mentais.

A outra razão importante para a escolha da geometria como contexto deste estudo diz respeito à facilidade em produzir e encontrar tarefas com múltiplas resoluções. Tal como referem Levav-Waynberg e Leikin (2009), quase todos os problemas de geometria nos livros escolares podem ser convertidos em tarefas com múltiplas resoluções (TMR). As TMR em geometria permitem alcançar várias soluções usando conceitos e propriedades dentro do currículo de geometria e não exigem nenhum conhecimento extracurricular de alunos e professores (Levav-Waynberg & Leikin, 2012). Já Polya (1981) refere que as resoluções de problemas de geometria nunca são totalmente baseadas em procedimentos algorítmicos, mas sim no raciocínio heurístico.

1.2. Objetivos e questões de investigação

O principal objetivo desta investigação consiste em analisar se os alunos do 9.º ano conseguem explorar diversos processos de resolução de uma tarefa, de forma assertiva e flexível e identificar os principais fatores que interferem com esse processo. Pretende-se assim responder as seguintes questões de investigação:

(i) Que fatores influenciam o processo de resolução dos alunos?
(ii) Que escolhas os alunos fazem quando adotam um determinado procedimento na resolução de uma tarefa e como justificam essas escolhas?
(iii) Que dificuldades os alunos revelam na exploração de diversos processos de resolução?
(iv) Quais os critérios em que se baseiam para escolher entre dois processos de resolução possíveis?

2. Enquadramento teórico

2.1. Conhecimento conceptual e procedimental em Matemática

A competência Matemática baseia-se no desenvolvimento do conhecimento conceptual e procedimental (Hiebert & Lefevre, 1986; Rittle-Johnson *et al.*, 2015). De acordo com algumas investigações em educação Matemática, as dificuldades de aprendizagem em Matemática dizem respeito à compreensão conceptual ou às competências para a resolução de problemas (Lithner, 2006).

Segundo Carpenter (1866) existe uma impossibilidade de definir o conhecimento conceptual e procedimental com precisão. No entanto, Kadijevich (2018) refere que podem ser encontradas na literatura muitas opiniões dos autores sobre os dois tipos de conhecimentos. Haapasalo e Kadijevich (2000) analisaram alguns destes pontos de vista e propuseram a seguinte distinção:

> Conhecimento procedimental consiste na utilização dinâmica e bem-sucedida de regras, algoritmos ou procedimentos específicos dentro das formas de representação relevantes. Isso geralmente requer não apenas o conhecimento dos objetos utilizados, mas também o conhecimento do sistema representacional que os expressam. Já o conhecimento conceptual diz respeito à capacidade de um indivíduo em fazer conexão entre coisas específicas, que podem ser conceitos, regras, algoritmos, etc. (p. 141).

Os mesmos autores concluíram que (i) o conhecimento procedimental geralmente requer passos conscientes e automáticos, enquanto que o conhecimento conceptual tipicamente requer pensamentos conscientes, e que (ii) o conhecimento procedimental também pode envolver algum pensamento consciente quando um aluno combina de forma hábil duas regras sem saber como e porque funcionam.

De acordo com Rittle-Johnson e Schneider (2015) o conhecimento procedimental está relacionado com o conhecimento de procedimentos usados na resolução de problemas, enquanto o conhecimento conceptual é basicamente o de conceitos cujo grau de conexão reflete a capacidade de um indivíduo.

Star (2005) salienta que o termo conceptual abrange não apenas, conhecimento de conceitos, mas também a forma como os conceitos podem ser conhecidos, por exemplo, profundamente e com conexões ricas. A mesma opinião é defendida por Hiebert e Lefevre (1986), referindo que "o conhecimento conceptual é caracterizado mais claramente como conhecimento rico em relações, ou seja, pode ser pensado como uma rede conectada de conhecimento" (págs. 3-4).

Na perspetiva de Rittle-Johnson *et al.* (2001), um procedimento consiste numa série de etapas, ou ações, relacionadas e com a intenção de alcançar uma meta, por isso para estes autores o conhecimento dos procedimentos é denominado de conhecimento procedimental. Os autores salientam ainda que os procedimentos podem ser (i) algoritmos - uma sequência pré-determinada de ações que levará à resposta correta quando executada corretamente ou (ii) ações possíveis que devem ser sequenciadas apropriadamente para resolver um determinado problema. “A natureza sequencial dos procedimentos diferencia o conhecimento procedimental das outras formas de conhecimento” (Hiebert & Lefevre, 1986, p.6). De uma forma geral o conhecimento procedimental é a capacidade de executar uma sequência de ações ou procedimentos para resolver problemas (Rittle-Johnson & Schneider, 2015).

Star (2005) defende que o termo conhecimento procedimental não se trata apenas de um conhecimento de procedimentos, mas também a forma como os procedimentos podem ser conhecidos, isto é, superficial e sem conexões ricas.

Apoiados em estudos desenvolvidos entre 2000 e 2010, Rittle-Johnson e Schneider (2015) analisaram as possíveis relações entre o conhecimento procedimental e conceptual e apresentaram quatro pontos de vista:

- Os conhecimentos procedimental e conceptual desenvolvem-se de forma independente.
- Em primeiro lugar, ocorre a aprendizagem dos conceitos e o conhecimento procedimental desenvolve-se com base nos conceitos adquiridos, isto é, baseado no conhecimento conceptual.
- Alguns autores defendem que a aprendizagem dos procedimentos ocorre em primeiro lugar e o conhecimento conceptual desenvolve-se com base nos procedimentos adquiridos.
- Os conhecimentos procedimental e conceptual desenvolvem-se de forma iterativa: o aumento de um deles conduz ao aumento sucessivo no outro.

Rittle-Johnson e Schneider (2015) defendem ainda que a visão iterativa (bidirecional) é atualmente a mais consensual. Na mesma perspetiva, Rittle-Johnson *et al*. (2015) concluíram que as relações entre o conhecimento conceptual e procedimental são frequentemente bidirecionais, ou seja, melhorias no conhecimento procedimental, muitas vezes originam melhorias no conhecimento conceptual, e vice-versa. No entanto, estes autores reconhecem que existem posições diversas, no que respeita às relações, ou seja, há quem defenda que as relações entre um e outro conhecimento são unidirecionais (conceptual para procedimental).

Delinear como esses dois tipos de conhecimento interagem é fundamental para compreender como ocorre o desenvolvimento do conhecimento, bem como melhorar a prática pedagógica dos professores (Rittle-Johnson *et al*., 2015).

2.2. Flexibilidade no uso de procedimentos

Muitos educadores de Matemática utilizam uma abordagem que faz com que os alunos vejam a matemática escolar como uma série de procedimentos a serem memorizados (Star, 2002). Alguns investigadores em educação Matemática, como por exemplo Hiebert e Carpenter (1992), salientam que (i) os procedimentos aprendidos por rotina são facilmente esquecidos e propensos a erros e (ii) as aprendizagens de procedimentos devem estar ligadas ao conhecimento conceptual a fim de promover o desenvolvimento de compreensão. Na mesma senda, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), reforçou a ênfase na aprendizagem conceptual em detrimento da memorização de factos e procedimentos sem qualquer entendimento (NCTM, 1989).

Um ponto de vista diferente é defendido por Greeno (1978). Segundo este autor, existem outras maneiras pelas quais um procedimento pode ser executado que poderiam ser caracterizadas como "inteligentes" ou mesmo como indicadores de "compreensão procedimental". Tendo em conta que atualmente os conhecimentos procedimental e conceptual interagem no fortalecimento recíproco (Rittle, Johnson & Schneider, 2015), os autores Maciejewski e Star (2019) consideram que a aprendizagem baseada simultaneamente em conceitos e procedimentos evita a utilização mecânica ou rotineira de procedimentos pelos alunos e desenvolve o conhecimento matemático dos mesmos.

No estudo elaborado por Maciejewski e Star (2019), é referido que a rotina sugere o uso repetido do mesmo procedimento em situações semelhantes e a ausência dessa rotina implica a utilização flexível de procedimentos. De acordo com o NCTM (2014) a fluência procedimental é uma componente crítica da proficiência Matemática e é definida da seguinte forma:

> A capacidade de aplicar procedimentos com precisão, eficiência e flexibilidade; transferir procedimentos para diferentes problemas e contextos; construir ou modificar procedimentos de outros procedimentos; e reconhecer quando uma estratégia ou procedimento é mais apropriado para aplicar do que outro. (p. 42).

Do mesmo modo, Rittle-Johnson e Star (2008), explicitam que associada à definição de flexibilidade procedimental está a capacidade de conhecer e reconhecer que existem vários procedimentos que podem ser usados para uma tarefa, selecionar o mais apropriado para a tarefa e modificar um procedimento conhecido de forma inovadora. Star (2005) defende a mesma ideia considerando que todos os alunos precisam ter um conhecimento profundo e flexível de uma variedade de procedimentos, em conjunto com a capacidade de fazer julgamentos críticos sobre que procedimentos ou estratégias são apropriados para o uso em situações particulares.

O NCTM (2000) refere ainda que a fluência procedimental é mais do que memorizar factos ou procedimentos, é mais do que compreender e ser capaz de usar um procedimento para uma dada situação. A fluência procedimental baseia-se no entendimento conceptual, no raciocínio estratégico e na capacidade de resolução de problemas (NCTM, 2000).

2.3. Modelos de escolha de procedimentos

Maciejewski e Star (2019) consideram que, aliado ao conceito de flexibilidade procedimental, nem sempre é claro o que se entende por procedimento mais adequado para uma determinada tarefa. De acordo com os autores, uma perspetiva muito comum é considerar que a estratégia mais apropriada é a mais eficiente, onde a eficiência de uma estratégia poderia ser determinada por quantos passos são necessários para concluir ou quanto tempo leva para ser concluído. O estudo realizado por Newton *et al.* (2010) sugere, por um lado, que os alunos têm tendência em preferir métodos que sejam "fáceis", definindo "fáceis", como sendo, "mais rápido", "menos etapas" e "menos complicados, ou seja, a estratégia mais eficiente. Por outro lado, alunos com dificuldades em Matemática poderão considerar que a estratégia mais apropriada não é a mais eficiente, mas sim a que é mais compreensível numa determinada situação.

No entanto, Verschaffel *et al.* (2009) sugerem que a estratégia mais adequada pode ser aquela que é usada com maior segurança, a menos que a estratégia considerada segura resulte em erro. Consideram ainda que os alunos podem optar por uma estratégia mais valorizada pela comunidade na qual está inserido (ex. sala de aula).

A adequação de uma estratégia nem sempre é fácil de definir com precisão e não pode resumir-se à eficiência, uma vez que o contexto, a tarefa e a pessoa desempenham um papel importante na determinação da estratégia mais adequada para um determinado problema (Newton *et al.*, 2010). Segundo os mesmos autores, a adequação também se pode reduzir à preferência estratégica de um aluno, ou seja, a escolha da estratégia mais apropriada pode-se resumir à estratégia que este implementou por considerar que entende melhor.

Segundo Maciejewski e Star (2019), a escolha de uma estratégia mais adequada ou ótima para um dado problema é essencial para a flexibilidade procedimental e para nos ajudar a entender as dificuldades que muitos alunos revelam quando tentam tornar-se mais flexíveis. Em particular, existem evidências de que os alunos nem sempre escolhem a estratégia mais apropriada para uma determinada tarefa, mesmo que demonstrem o conhecimento de múltiplas estratégias (Newton, Star & Lynch, 2010).

2.4. O raciocínio matemático

Desenvolver a capacidade de raciocínio dos alunos é o grande objetivo do ensino da Matemática e esse objetivo justifica o importante papel da disciplina em todos os sistemas educativos (Ponte *et al.*, 2012). A simples memorização de conceitos, representações e procedimentos rotineiros não é suscetível de desenvolver a capacidade de raciocínio matemático dos alunos, pelo contrário, leva-os a ter uma visão da Matemática como um conjunto de regras mais ou menos desconexas e não como uma disciplina lógica e coerente (ME, 2007).

Mais importante do que conhecer a definição dos conceitos é perceber o modo como estes conceitos se relacionam uns com os outros e como podem ser usados na resolução de problemas (Ponte *et al.*, 2012). A capacidade de raciocinar é relevante, tanto no que diz respeito ao uso eficaz da Matemática em diversas situações, bem como para a sua própria compreensão (NCTM, 2007).

O raciocínio matemático é reconhecido pela comunidade de investigadores em educação Matemática como sendo fundamental e caraterizam-no de várias formas. Oliveira (2008) define raciocínio matemático como "um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)" (p.3). Na perspetiva de Russel (1999) o raciocínio é "o que usamos para pensar sobre as propriedades de um determinado objeto matemático e desenvolver generalizações que se apliquem a toda a classe de objetos" (p.1). Na perspetiva de Aliseda (2003), é caracterizado pela certeza, pela existência de uma relação necessária entre premissas e conclusão e pela irrefutabilidade das conclusões.

Lithner (2006) considera que o termo raciocínio matemático surge muitas vezes de forma implícita (sem definição), usado para indicar que o argumento em curso é de alta qualidade e para especificar o tipo de raciocínio em causa, por exemplo, lógico-dedutivo. Contra estas perspetivas o autor define o termo "raciocínio" como a linha de pensamento durante a resolução de tarefas matemáticas para produzir afirmações e chegar a conclusões. O raciocínio definido pelo autor não é necessariamente baseado na lógica formal, não se restringe a algum tipo de demonstração e pode até ser incorreto, desde que haja algum tipo de razão ponderada que apoie as ações do raciocinador. No presente estudo será esta a conceptualização de raciocínio que adotaremos.

Os estudos que realizou, que consistiram na análise do raciocínio dos alunos na resolução de tarefas, Lithner (2000, 2003, 2008) define duas categorias principais de raciocínio: o raciocínio criativo e o imitativo.

O raciocínio criativo tem um papel mais proeminente na resolução de tarefas não rotineiras, onde os argumentos são construídos pelo solucionador e fundamentados matematicamente (Lithner, 2008). O autor considera que o raciocínio criativo consiste nos critérios: a novidade, a flexibilidade, a plausibilidade e o fundamento matemático.

Falamos de novidade quando o pensador cria uma nova sequência de raciocínio ou uma sequência já elaborada anteriormente e posteriormente esquecida é recriada. Quanto à flexibilidade o raciocinador admite constantemente diferentes abordagens e adaptações a uma dada situação. Não há uma fixação a nível de conteúdos e memorização de soluções ou algoritmos que podem dificultar o processo de resolução. No que respeita à plausibilidade, esta é apoiada em argumentos que justificam a escolha ou a implementação de uma determinada estratégia e que conduzem às conclusões verdadeiras e plausíveis. Por fim, o fundamento matemático é baseado em raciocínios caraterizados por argumentos bem fundamentados e que têm por base as propriedades matemáticas intrínsecas dos componentes envolvidos.

De acordo com o autor, as tarefas que potenciam o raciocínio criativo não têm necessariamente de ser desafios, uma vez que pode ser aplicado em tarefas simples. No entanto, na maioria dos casos, esse tipo de raciocínio é bastante incomum nos alunos (Sidenvall, Lithner & Jäder, 2015).

Quanto ao raciocínio imitativo, Sidenvall *et al*. (2015) consideram que este é geralmente aplicado na resolução de tarefas rotineiras. Destacam ainda que o raciocínio imitativo consiste na resolução de tarefas, usando métodos conhecidos ou facultados por outra pessoa (por exemplo, um professor ou um livro). Segundo Lithner (2008) o raciocínio matemático imitativo pode ser de dois tipos principais: memorizado e algorítmico.

No raciocínio matemático memorizado a escolha da estratégia pelo aluno consiste unicamente em recordar e transcrever uma resposta completa que este memorizou, por exemplo, a partir de um livro. Lithner (2008) argumenta que questões típicas de provas requerem apenas raciocínio memorizado.

No caso do raciocínio matemático algorítmico, este consiste na seleção de um algoritmo considerado adequado pelo aluno que o implementa na resolução da tarefa proposta, sendo que apenas um erro do aluno pode impedir que a resposta correta seja alcançada. Para Lithner (2008) um algoritmo é um conjunto de regras utilizadas para resolver uma determinada tarefa específica. Segundo o autor, o raciocínio algorítmico inclui as seguintes subcategorias:

- Familiar - O aluno reconhece que a tarefa é familiar e implementa um algoritmo que funciona para esse tipo de tarefa familiar.
- Delimitação - O aluno primeiro delimita um conjunto de algoritmos aplicáveis com base nas características superficiais da tarefa, sem prever o resultado da aplicação do algoritmo. Se a expetativa do aluno acerca do resultado não for atendida pelo resultado do algoritmo, a estratégia é abandonada e uma nova é escolhida a partir do conjunto delimitado.
- Guiada – Se a tarefa não for familiar e não for delimitada por um conjunto de algoritmos, então o raciocinador procura uma orientação externa. A escolha da estratégia diz respeito à identificação de similaridades superficiais entre a tarefa e um exemplo, uma definição, um teorema, uma regra ou outra situação, que o aluno encontrou previamente num texto matemático (ex. manual). A escolha da estratégia pode também ser guiada por uma outra pessoa que não seja o raciocinador (ex. um professor ou um colega).

Em suma, apresentamos na Figura 2.1 uma visão geral dos tipos de raciocínio estabelecidos por Lithner (2006) de forma empírica.

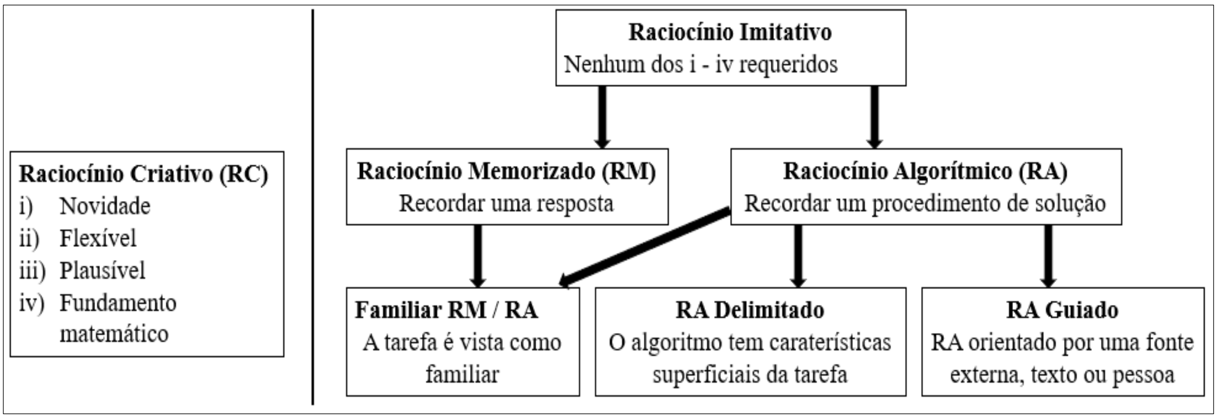


Figura 2.1 – Visão geral dos tipos de raciocínio (adaptado de Lithner, 2006)

Os estudos realizados por Jonsson *et al.* (2014) e Wirebring *et al.* (2015), mostraram que aprender Matemática usando raciocínio matemático criativo e a construção do próprio método de resolução pode ser mais eficiente do que os alunos usarem raciocínio algorítmico e serem facultados os procedimentos de resolução. No entanto, segundo Lithner (2006) é evidente que a principal característica comum de maioria dos alunos no que respeita ao raciocínio é uma tendência para o uso dos diferentes tipos de raciocínio algorítmico em ambientes de aprendizagem (atividades do aluno, ensino, livros didáticos e testes). Por exemplo Newton *et al.* (2010) constataram que os alunos geralmente são mais propensos a usar uma abordagem familiar a menos que essa abordagem seja difícil.

Alguns autores (Newton, *et al.*, 2010; Maciejewski1 & Star, 2019), consideram que o quadro imitativo/criativo de Lithner (2008) é limitado, na medida em que apenas analisa o tipo de raciocínio utilizado pelo aluno, excluindo situações como as justificações dadas pelos mesmos quando adotam um determinado procedimento. Os autores consideram que pode existir variações dentro de um único algoritmo e serem adaptados a uma determinada tarefa. Mesmo que a aplicação de um algoritmo ou procedimento seja fácil para um aluno, podem ser feitas escolhas durante a implementação desse algoritmo (Maciejewski1 & Star, 2019). Os autores salientam que os procedimentos familiares implícitos na estrutura imitativa/criativa não requerem qualquer justificação para aplicá-lo, não sendo favorável à compreensão do conhecimento procedimental. Neste sentido, é necessário entender com precisão as escolhas que os alunos fazem durante um procedimento.

2.5. Justificações para escolhas em procedimentos

Num estudo elaborado por Maciejewski1 e Star (2019), cujo objetivo era observar e categorizar os tipos de justificações que emergem nas tarefas procedimentais expressas pelos alunos, foi possível identificar as justificações do tipo Algorítmica e Antecipatória (Tabela 2.1) e outras justificações que foram manifestadas para não escolher uma determinada ação na resolução de tarefas. Para os autores o termo “justificações” refere-se a razões verbalizadas para a execução de uma ação escrita ao resolver uma tarefa matemática. Embora existam justificações de outras formas (por exemplo, escritas) e o termo “justificação” estar associado ao termo “demonstração”, no presente estudo será adotada uma conceptualização mais restrita de “justificação” tal como definido por Maciejewski1 e Star (2019).

Tabela 2.1 – As duas categorias e seis subcategorias de justificações (Maciejewski1 & Star, 2019).

1. Algorítmica	
1.a) Adesão a um algoritmo ou procedimento pré-definido	Uso de um algoritmo / procedimento que poderia ser aplicado em qualquer situação suficientemente semelhante
1.b) Resolução da tarefa de acordo com uma autoridade	Menção explícita de resolução de acordo com uma autoridade externa (ex. professor)
1.c) Mudança de estado do problema sem objetivar a meta	Realização de uma ação sem reconhecer o resultado da ação
2. Antecipatória	
2.a) Atingir um possível estado futuro	Reconhecer um estado (possível) futuro da tarefa e executar uma ação para alcançar esse estado
2.b) Evitar possíveis estados ou operações futuras	Reconhecer um estado (possível) futuro da tarefa e executar uma ação para evitar esse estado
2.c) Eficiência	Realizar uma ação com a intenção de reduzir a duração (tempo; número de etapas) da solução

Os modos algorítmicos de justificação, segundo afirmam os autores são caracterizados por um compromisso com uma maneira de abordar a tarefa que poderia ser aplicada a qualquer tarefa suficientemente semelhante. Distinguem-se por envolver procedimentos de resolução de uma determinada tarefa que são externas a essa tarefa, ou seja, a justificação expressa pelo aluno pode envolver as características da tarefa dada, mas não é adaptada à tarefa (Maciejewski1 & Star, 2019).

No que respeita às justificações antecipatórias, a sua principal característica, e que a distingue das algorítmicas, é que as justificações são específicas e adaptadas à tarefa em questão. Um aluno realiza uma ação em resposta ao estado atual da tarefa, antecipando que a ação realizada conduz ao estado final desejado mais próximo (Maciejewski1 & Star, 2019).

Outras declarações que não se encaixam nas duas categorias acima e que segundo Maciejewski1 e Star (2019) não são necessariamente justificações no sentido tradicional e que são muito comuns nos alunos são: "Uma ação alternativa simplesmente não é vista pelo aluno" e "Uma ação é vista e imediatamente realizada pelo aluno" (Newton *et al.*, 2010; Maciejewski1 & Star, 2019).

Duas outras formas de justificações face à escolha dos alunos identificada no estudo de Maciejewski1 e Star (2019) são: a conveniência (quando um aluno permanece num procedimento porque já estava a efetuá-lo) e a indiferença (quando o aluno escolhe um de dois procedimentos aleatoriamente porque ambos parecem semelhantes). No entanto, é referido pelos autores que ambas as justificações poderiam ser enquadradas nas justificações algorítmica ou antecipatória, dependendo do contexto em que surgem, porque são arbitrárias, ou seja, não dependem da ação.

Do mesmo estudo, Maciejewski1 e Star (2019) constataram que os alunos nem sempre apresentam exclusivamente um único tipo de justificação para as suas escolhas. Além disso, exibem mais do que um tipo de justificação dentro da mesma questão ou dentro de um único passo do problema.

2.6. Fatores que influenciam os procedimentos

Um dos fatores que influenciam a implementação de estratégias é a falta de conhecimento prévio dos conteúdos. Newton *et al.* (2010) consideram que o conhecimento prévio que o aluno traz para uma determinada tarefa pode dificultar o uso flexível de procedimentos. Os autores salientam que um aluno que seja fluente num determinado conteúdo poderá ter mais facilidade em implementar certos procedimentos do que um aluno que não seja fluente. Tambychik e Meerah (2010), consideram que a falta de capacidades matemáticas dos alunos influência a tomada de decisão quando eles tentam implementar uma estratégia, uma vez que são sujeitos a aplicar e integrar muitos conceitos matemáticos. Neste sentido, o conhecimento conceptual e o conhecimento procedimental são essenciais para as capacidades dos alunos na resolução de tarefas (Geary, 2004). Outro aspeto relevante identificado por Garderen (2006) é a deficiência do aspeto visual que pode causar dificuldade em diferenciar, relacionar e organizar informações de forma significativa.

A interpretação do enunciado é um aspeto crucial na resolução de tarefas (Tambychik & Meerah, 2010), ou seja, em primeiro lugar é necessário perceber o que é pedido, antes de resolver a tarefa (Polya, 1981). Porém, o excesso de informações pode confundir o raciocínio dos alunos, dificultando a seleção das informações essenciais para a aplicação de uma determinada estratégia, o que poderá conduzir a erros (Tambychik & Meerah, 2010). Os autores consideram que, além de compreender o problema, é necessário tomar decisões para resolvê-lo, a dificuldade em estabelecer uma conexão significativa e a incapacidade de transferir facilmente os conceitos da Matemática podem interferir no sucesso das estratégias a implementar.

Rittle-Johnson, Star e Durkin (2009) sugerem que o conhecimento prévio de estratégias únicas aumenta a probabilidade dos alunos se tornarem menos flexíveis no uso de múltiplas estratégias. O estudo elaborado por Lithener (2000) concluiu que geralmente os alunos concentram as suas ideias principalmente nos procedimentos familiares e esse foco é tão dominante que dificulta e impede que outras abordagens sejam iniciadas e implementadas. Na mesma perspetiva, Newton *et al.* (2010) concluíram que a abordagem padrão para resolver certos tipos de problemas torna menos provável que os alunos adotem estratégias alternativas. Ressaltam ainda que, um aluno que já conhece uma estratégia para resolver um problema, prefere usar essa estratégia acreditando que seja eficiente e precisa e, em seguida, poderá ter pouca motivação para aprender e implementar outras estratégias.

Por outro lado, quando os alunos têm contacto com múltiplas estratégias pela primeira vez, a carga de processamento para aprenderem várias estratégias simultaneamente sobrecarrega a memória dos alunos e as suas capacidades de trabalho diminuem (Sweller, Merrienboer & Paas, 1998).

2.7. Importância das TMR no ensino da Matemática

Resolver problemas de diferentes formas contribui para o desenvolvimento da conetividade do conhecimento matemático de um indivíduo (NCTM, 2000). Na opinião de alguns investigadores como por exemplo, Hiebert e Carpenter (1992), as conexões formam uma parte essencial da compreensão matemática. Além disso, os autores Stugler e Hiebert (1999) consideram que a consciência dos alunos de que os problemas matemáticos podem ter múltiplas soluções e a abordagem constante por parte do professor da exploração de diversos processos de resolução de uma tarefa, aumenta a qualidade das aulas de Matemática. Por um lado, a consciência do aluno e por outro a oportunidade de solucionar um problema de diferentes modos, potencia a descoberta de diferentes caminhos nos seus conhecimentos matemáticos (Schoenfeld, 1983). Na mesma perspetiva, Star e Newton (2009) defendem que os alunos desenvolvem a sua flexibilidade mental e criatividade quando resolvem problemas de várias formas. A mesma opinião é defendida por Star e Rittle-Johnson (2008) quando referem que um aluno que implementa a sua estratégia com flexibilidade e eficiência demonstra o conhecimento de múltiplas estratégias e a sua destreza mental.

O estudo de Kwon *et al.* (2006), sobre a criatividade matemática com base em tarefas abertas, revela que os problemas matemáticos com apenas uma resposta correta desencoraja os alunos a explorar diversas ideias, enquanto que as tarefas com múltiplas resoluções (TMR) promovem e encorajam o raciocínio criativo. Elia *et al.* (2009) concluíram nos seus estudos que a necessidade de flexibilidade da estratégia em TMR manifesta-se apenas quando a primeira estratégia escolhida não obtém sucesso.

3. Opções metodológicas

O objetivo deste capítulo é explicitar as opções metodológicas que nortearam o desenvolvimento da investigação realizada. De modo a compreender as várias fases da investigação em função dos objetivos traçados, apresentam-se a metodologia usada, os instrumentos de recolha de dados, os participantes do estudo e todos os procedimentos adotados.

3.1. Metodologia de investigação qualitativa

O problema de investigação tem uma importância decisiva na escolha da metodologia a ser utilizada. Para fazer a abordagem da problemática da flexibilidade procedimental na resolução de tarefas, foi escolhida uma metodologia de natureza qualitativa/interpretativa, uma vez que se pretendia analisar se os alunos do 9.º ano conseguem explorar diversos processos de resolução de uma tarefa, de forma assertiva e flexível e identificar os principais fatores que interferem com esse processo. Para a compreensão dos atuais problemas de ensino, em especial do ensino da Matemática, Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (1994), consideram que este tipo de metodologia é a adequada.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), "a expressão investigação qualitativa está associada a um termo genérico que agrupa diversas estratégias de investigação que partilham determinadas características" (p.16). De acordo com os mesmos autores, em investigações desta natureza os dados recolhidos, por um lado, são chamados qualitativos, pois são ricos em pormenores descritivos relativos a pessoas, locais e conversas e, por outro lado, resultam de um contacto profundo com o indivíduo no seu contexto natural. Com este paradigma (investigação qualitativa), procura-se conhecer a realidade como ela é vista pelos seus diversos intervenientes, uma vez que esta privilegia a compreensão dos fenómenos comportamentais que podem ser observados a partir dos sujeitos da investigação (Bogdan & Biklen, 1994).

Muitos autores, como por exemplo Taylor e Bogdan (1987), sintetizam algumas características, identificativas deste tipo de estudos, que apresentamos à luz do presente estudo.

(i) Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural. Com efeito, os dados foram recolhidos em ambiente natural (escola) e que contribuiu para que as ações fossem melhor compreendidas quando confrontadas com as visões e perspetivas dos seus atores; (ii) Como investigador fiquei encarregue de ser o principal instrumento de recolha de dados sobre o objeto de estudo que foram os alunos. Para a compreensão do significado dos dados obtidos, estes foram recolhidos na forma de palavras e não de números, dando origem a uma investigação com resultados escritos, contendo citações com base nos dados para ilustrar a construção de uma visão sobre a problemática investigada; (iii) Os investigadores qualitativos preocupam-se mais com o processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. Pretendi com este estudo que os alunos encarassem as atividades de investigação como oportunidades de integrar novas aprendizagens de forma positiva e consciente. Procurei valorizar o tipo de processo desenvolvido pelos alunos em detrimento dos produtos ou resultados alcançados; (iv) Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. A análise decorreu através da observação de comportamentos e da reflexão sobre a atividade desenvolvida. Assim, não pretendi estudar uma hipótese previamente estabelecida, mas sim a construção de novo conhecimento, ou de uma nova visão, que poderá contribuir para o estabelecimento da melhoria da flexibilidade procedimental dos intervenientes no estudo. (v) Na análise dos dados e na construção de conhecimento tive em conta o ponto de vista do aluno. No entanto, tanto a análise como os conhecimentos emergentes deste estudo resultaram da minha interpretação.

3.2. Técnicas de recolha de dados

Antes de especificar as técnicas de recolha de dados utilizadas no estudo, importa salientar as principais técnicas de recolha de dados nas investigações qualitativas que muitos autores apresentam. Os autores Bogdan e Byklen (1994), Tuckman (2002), Stake (1999), Latorre (2003) apontam três grandes métodos de recolha de dados que se podem utilizar como fontes de informação nas investigações qualitativas: (a) a observação; (b) o inquérito, o qual pode ser oral – entrevista ou escrito – questionário e (c) a análise de documentos.

Neste estudo as técnicas de recolha de dados utilizadas são as propostas por Latorre (2003): observação participante, a entrevista (não-estruturada) e a análise documental.

No entendimento de Igea *et al.* (1995) a importância do uso de diversos métodos para a recolha de dados, permite ao investigador recorrer a várias conceções sobre a mesma situação, bem como obter informação de natureza variada e em seguida efetuar comparações entre as diversas informações, efetuando assim a triangulação da informação obtida.

3.2.1. Observação

Para Bogdan e Biklen (1994) a observação participante é uma das técnicas mais representativas da investigação qualitativa. Também conforme Latorre (2003), é uma técnica fundamental na metodologia qualitativa.

Segundo Correia (2009), a observação participante é realizada em contacto direto, frequente e prolongado do investigador, com os intervenientes, nos seus contextos culturais. De acordo com a mesma autora, a observação enquanto técnica exige treino disciplinado, preparação cuidada e conjuga alguns atributos indispensáveis ao observador-investigador, tais como atenção, sensibilidade e paciência. A autora refere ainda, com base na obra de Spradley (1980), que a observação participante permite-nos examinar as atividades das pessoas, as características físicas da situação do ponto de vista social, o que nos permite sentir que somos parte integrante daquela realidade.

É importante salientar que um bom observador é aquele que se coloca no lugar do observado, tal como refere Bardin (1997):

> Na observação participante, o observador coloca-se na posição dos observados, devendo inserir-se no grupo a ser estudado como se fosse um deles, pois assim tem mais condições de compreender os hábitos, atitudes, interesses, relações pessoais e características do funcionamento daquele grupo.

Para Amendoeira (1999), na observação participante, o investigador é o principal instrumento da investigação, sendo uma clara vantagem, dada a possibilidade de estar disponível para recolher dados ricos e pormenorizados, através da observação de contextos naturais e nos quais é possível ter acesso aos conceitos que são usados no dia a dia, por se conhecer a linguagem dos intervenientes.

Na perspetiva de Kothari (2004), a observação torna-se uma ferramenta científica e o método de recolha de dados para o pesquisador, quando serve a um propósito de pesquisa formulado, é sistematicamente planeado, registado e está sujeito a verificações, controlos de validade e confiabilidade. Ressalta ainda que no método de observação, a informação é procurada por meio da observação direta do próprio investigador, sem efetuar perguntas que exigem respostas do envolvente. A mesma opinião é apontada por Aires (2011) ao afirmar que uma das características básicas da observação tem sido tradicionalmente o seu não-intervencionismo. O observador não manipula nem estimula os seus sujeitos.

Uma das ações desempenhada pelo investigador durante a observação participante consiste em gravar as informações em algum meio físico (notas de campo, vídeo, gravação de áudio ou fotografias). Nestes registos, o observador torna-se o protagonista direto: ele observa e regista, durante ou após a observação (Latorre, 2003). Entre este tipo de registos, vamos considerar neste estudo as gravações em áudio.

3.3.2. Entrevista

Segundo Latorre (2003), esta técnica está centrada na perspetiva dos participantes e enquadra-se nos ambientes de diálogo e interação e consiste numa conversa entre duas ou mais pessoas, uma das quais, o entrevistador, onde este tenta obter informações ou manifestações de opiniões ou crenças da outra.

O tipo de entrevista adotada neste estudo é a não-estruturada, na medida em que se desenvolve de acordo com os objetivos definidos. As perguntas não são definidas *a priori* e, por isso, surgem com o decorrer da interação entre os dois agentes (entrevistador e entrevistado). Por outro lado, pretende-se que o investigador obtenha uma boa perceção das diferenças individuais e mudanças manifestadas pelos alunos e possibilitar um melhor aprofundamento e exploração dos conteúdos trabalhados. De acordo com Aires (2011), este tipo de entrevista aplica-se predominantemente nos estudos de carácter qualitativo e o seu objetivo básico consiste na recolha e aprofundamento de informação sobre acontecimentos, dinâmicas, conceções detetadas, ou não, durante a observação.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994), o sujeito desempenha um papel importante na definição do conteúdo da entrevista. Os mesmos autores salientam a importância de o investigador informar com brevidade o entrevistado da intenção da entrevista e garantir que os dados recolhidos serão tratados confidencialmente.

3.3.3. Análise documental

Outra forma importante de recolher informações, e que será implementada neste estudo, consiste na análise de documentos, objetivando a transformação das informações de modo a torná-las mais compreensíveis para correlacioná-las com os demais dados oriundos de outras fontes. Mais especificamente analisar a resolução dos alunos das questões propostas.

De acordo com Latorre (2003), a análise de documentos é uma atividade sistemática e planeada que consiste em analisar documentos escritos a fim de obter informações úteis e necessárias para responder aos objetivos da investigação. Para Sá-Silva *et al.* (2009), o uso desta técnica como fonte de informações é indispensável para o investigador, portanto deve ser apreciado e valorizado. Também Lüdke e André (1986) salientam que a análise documental constitui um método importante que permite, por um lado, completar informações obtidas por outras técnicas, por outro, procurar aspetos novos de um tema ou problema. Assim, o investigador irá extrair os elementos informativos de um documento original a fim de expressar seu conteúdo de forma abreviada, resultando na conversão de um documento primário em documento secundário (Kripka *et al.*, 2015).

Como refere também Cellard (2008), a análise documental favorece a observação do processo de maturação ou de evolução de indivíduos, grupos, conceitos, conhecimentos, comportamentos, mentalidades, práticas, entre outros. Lüdke e André (1986) afirmam que a análise documental pode ser entendida como uma série de operações, que visa estudar e analisar um, ou vários documentos, buscando identificar informações factuais nos mesmos, para descobrir as circunstâncias sociais, económicas e ecológicas com as quais podem estar relacionados, cingindo-se sempre às questões de interesse.

Lükdle e André (1986) consideram que a análise documental é constituída pelas etapas de escolha e recolha dos documentos e de posterior análise, sendo que a análise deve atender aos procedimentos metodológicos que são: a caracterização de documento, a codificação, os registos, a categorização e a análise crítica. O mesmo é referido por Godoy (1995) considerando que na pesquisa documental há três aspetos que merecem uma atenção especial do investigador: a escolha dos documentos, o acesso a eles e a sua análise. O autor refere ainda que a análise documental permite definir os melhores documentos para analisar o problema proposto e as questões de interesse.

3.4. Modalidade de investigação

Para este estudo a modalidade de investigação é o estudo de caso. No entender de Merriam (1988), o estudo de caso consiste na observação detalhada de um contexto, ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico. Eisenhardt (1989, p.534) define um estudo de caso contemporâneo como "uma estratégia de investigação voltada para a compreensão da dinâmica presente em contextos singulares", que poderia ser o estudo de um único caso ou de vários casos, combinando diferentes métodos para a recolha de evidências que permitem descrever, verificar ou gerar teoria. No que se refere à opinião de Zainal (2007), os estudos de caso, na sua verdadeira essência, consistem em explorar e investigar um fenómeno da vida real contemporânea através de uma análise contextual detalhada de um número limitado de eventos ou condições e seus relacionamentos. Yin (1984, p. 23) define o estudo de caso como "uma investigação empírica que investiga um fenómeno contemporâneo dentro do seu contexto natural, quando as fronteiras entre o fenómeno e o contexto não são claramente estabelecidas e onde se utiliza múltiplas fontes de evidência". Godoy (1995) esclarece que o estudo de caso se caracteriza como um tipo de investigação cujo objeto é uma unidade que se analisa profundamente, ou pode ser baseada no exame detalhado de um ambiente, de um simples sujeito ou de uma situação em particular. Na perspetiva de Ponte (1994, p.3):

> O estudo de caso pode ser caracterizado como um estudo de uma entidade bem definida seja ela, pessoa, escola, curso, disciplina, etc. que visa conhecer em profundidade o seu "como" e os seus "porquês" relativamente a uma situação específica procurando o que há nela de mais característico e assim contribuir para a compreensão global do fenómeno de interesse.

De acordo com Kothari (2004), o método do estudo de caso baseia-se em várias suposições referindo três importantes: (i) a suposição de uniformidade na natureza humana básica, apesar do facto de que o comportamento pode variar de acordo com as situações; (ii) a hipótese de estudar a história natural da unidade de estudo em questão e (iii) a hipótese de ser efetuado um estudo abrangente sobre a unidade em questão.

Segundo Ponte (1994), o estudo de caso apresenta algumas características: (i) não constitui por si só uma metodologia de investigação bem definida; (ii) é essencialmente um *design* de investigação que pode ser conduzido no quadro de paradigmas metodológicos bem distintos, como o positivista, o interpretativo ou o crítico; (iii) pode ter propósitos diversos e utilizar uma grande variedade de instrumentos e estratégias; (iv) tem sempre forte cunho descritivo, o investigador não pode modificar a situação, mas compreendê-la como ela é e (iv) apoia-se numa descrição factual, literal, sistemática e tanto quanto possível completa do seu objeto de estudo.

Na opinião de Chetty (1996), o método de estudo de caso é uma metodologia rigorosa que: (i) é adequada para investigar fenómenos com o objetivo de responder como e por que eles ocorrem; (ii) permite estudar um tópico específico; (iii) é ideal para o estudo de tópicos de investigação nos quais as teorias existentes são inadequadas; (iv) permite estudar os fenómenos de múltiplas perspetivas e não da influência de uma única variável; (v) permite explorar de forma mais aprofundada e adquirir conhecimento mais amplo sobre cada fenómeno, o que permite o surgimento de novos sinais sobre questões emergentes e (vi) desempenha um papel importante na investigação, por isso não deve ser usado apenas como a exploração inicial de um fenómeno determinado.

A metodologia do estudo de caso enquadra-se ao nível do *design* desta investigação, uma vez que não se pretende ter um controlo sobre os acontecimentos nem manipular as potenciais causas do comportamento dos participantes (Merriam, 1988; Yin, 1984). O recurso ao estudo de caso prendeu-se também com as características específicas de cada aluno, únicas em muitos aspetos. Procuramos, assim, identificar o essencial e o mais característico de cada caso, pelo que foi necessário identificar o seu carácter único e delimitá-lo (Goetz & Lecompte, 1984).

3.5. Procedimentos adotados

Todos os procedimentos para a implementação do estudo foram adotados, atendendo ao objetivo principal do estudo que consiste em analisar se os alunos do 9.º ano conseguem explorar diversos processos de resolução de uma tarefa, de forma assertiva e flexível e identificar os principais fatores que interferem com esse processo, tendo em conta as seguintes questões de investigação:

(i) Que fatores influenciam o processo de resolução dos alunos?
(ii) Que escolhas os alunos fazem quando adotam um determinado procedimento na resolução de uma tarefa e como justificam essas escolhas?
(iii) Que dificuldades os alunos revelam na exploração de diversos processos de resolução?
(iv) Quais os critérios em que se baseiam para escolher entre dois processos de resolução possíveis?

3.5.1. Escolha dos participantes

3.5.1.1. A turma

Participaram deste estudo, realizado no ano letivo 2018-2019, alunos de uma turma do 9.º ano do ensino básico, de uma escola secundária situada no concelho de Almada. Esta era constituída por vinte e três alunos, dos quais oito eram raparigas e quinze eram rapazes. Os alunos encontravam-se na faixa etária normal para o 9.º ano de escolaridade, sendo que, no início do ano letivo a maioria tinha 14 anos e as idades variavam entre os 13 e os 16 anos.

Na globalidade a turma apresentava comportamento inadequado, com maior incidência nos rapazes, no que diz respeito ao trabalho e à postura em aula. Os alunos poucas vezes realizavam os trabalhos de casa e a maioria não passava os trabalhos em aula para o caderno diário. Relativamente à disciplina de Matemática, a maioria dos alunos revelou grandes dificuldades de aprendizagem, apresentando um aproveitamento pouco razoável. Importa salientar que estas dificuldades resultaram também do mau aproveitamento que tiveram na disciplina de Matemática no ano letivo anterior.

A escolha da turma justifica-se pelo conhecimento geral que o investigador tem da turma, uma vez que foi a turma de estágio atribuída no início da prática pedagógica e que, portanto, acompanhou melhor desde o início do ano letivo e criou uma boa relação com a mesma. O contacto com estes alunos, durante o ano letivo, permitiu saber de antemão as suas competências, aptidões e o comportamento em sala de aula, o que foi benéfico para a escolha dos participantes no estudo.

3.5.1.2. Os alunos participantes

Para este estudo foram escolhidos três alunos da turma. Esta seleção privilegiou a heterogeneidade ao nível do sexo e das avaliações obtidas, nos 1.º e 2.º períodos, à disciplina de Matemática. Depois de uma reflexão com a professora da turma acerca das características gerais e do comportamento/postura em sala de aula, foi também tomada em consideração a forma como realizam tarefas. A escolha teve em atenção se os alunos, de uma forma geral, terminam as tarefas, o modo de pensar, o desenvolvimento do raciocínio e as abordagens menos comuns na resolução de algumas questões. Outro aspeto relevante consistiu na escolha de alunos comunicativos e participativos, para que o diálogo entre o investigador e os alunos durante as questões propostas permitisse recolher dados interessantes e credíveis para uma posterior análise.

3.5.2. As tarefas

Tendo em conta que o objetivo principal deste estudo era analisar a flexibilidade associada à resolução de questões com múltiplas resoluções, as tarefas que construímos foram pensadas, essencialmente de acordo com os objetivos definidos para este estudo, ou seja, que permitissem responder às questões de investigação referidas anteriormente. Assim, foram propostas aos alunos questões com pelo menos duas hipóteses de resolução de modo a permitir o estudo da flexibilidade procedimental.

Outro aspeto relevante na construção das tarefas prende-se com as características da turma e em particular dos participantes do estudo, e por esse motivo as questões propostas são exercícios com grau de dificuldades a variar entre reduzido e médio, atendendo ao nível de exigência entre os diferentes processos de resolução possíveis para a tarefa.

As tarefas envolvem conteúdos do tópico curricular - circunferência, nomeadamente propriedades dos ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência, soma dos ângulos internos de um polígono e polígonos inscritos numa circunferência. Apresentam-se a seguir os conteúdos e os objetivos de aprendizagem que, de uma forma geral, estão subjacentes às tarefas propostas (Tabela 3.1).

Tabela 3.1 – Listagem dos conteúdos e dos objetivos subjacentes às tarefas propostas

Conteúdos
• Propriedades de ângulos, arcos e cordas definidos numa circunferência; • Amplitude de um ângulo ao centro; • Amplitude de um ângulo inscrito num arco de circunferência; • Amplitude de um ângulo excêntrico com o vértice no interior e no exterior de uma circunferência; • Soma dos ângulos internos de um polígono convexo; • Propriedade dos ângulos externos de um triângulo.
Objetivos específicos
➢ Reconhecer que a ângulos ao centro iguais correspondem arcos iguais; ➢ Reconhecer que a cordas iguais correspondem arcos iguais; ➢ Reconhecer que qualquer reta perpendicular a uma corda no seu ponto médio divide a corda e cada um dos arcos que determina em duas partes geometricamente iguais; ➢ Reconhecer que a medida da amplitude de um ângulo ao centro é igual à medida da amplitude do arco compreendido entre os seus lados; ➢ Reconhecer que a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados; ➢ Reconhecer que a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do ângulo ao centro correspondente; ➢ Reconhecer que a amplitude de um ângulo com o vértice no interior de uma circunferência é igual à semissoma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e entre o prolongamento dos seus lados; ➢ Reconhecer que a amplitude de um ângulo com o vértice no exterior de uma circunferência, cujos lados a intersetam, é igual à semidiferença entre as amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados; ➢ Reconhecer que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é dada por $(n-2) \times 180°$; ➢ Reconhecer que a amplitude de um ângulo externo de um triângulo é a soma das amplitudes dos dois ângulos internos não adjacentes.

3.5.3. Implementação do estudo

Para a implementação do estudo foi proposto um conjunto de questões em sessões de 90 minutos, num lugar conveniente, a biblioteca, a sala de estudo ou a sala de aula e em dias distintos. A investigação decorreu após os conteúdos serem lecionados pela professora titular da turma e durante as duas últimas semanas do 3.º período. Encontram-se na Tabela 3.2 a calendarização das sessões de trabalho desenvolvidas para a recolha dos dados.

Tabela 3.2 – Calendarização das sessões de trabalho

	José			Maria		
	Data	Local	Duração	Data	Local	Duração
Sessão 1	30/maio/2019	Sala de estudo	90’	7/junho/2019	Biblioteca	90’
Sessão 2	6/junho/2019	Sala de aula	90’	11/junho/2019	Biblioteca	90’

	Luís		
	Data	Local	Duração
Sessão 1	31/maio/2019	Sala de estudo	90’
Sessão 2	5/junho/2019	Sala de aula	90’

No decorrer da realização de cada uma das questões propostas, previamente a qualquer discussão, foram solicitados aos participantes que implementassem a primeira estratégia de resolução sem qualquer intervenção do investigador, a menos que houvesse dúvidas. O objetivo era perceber qual seria a primeira estratégia usada pelos participantes. Mediante cada estratégia implementada e com base numa entrevista (não-estruturada), os alunos foram convidados a explicar como pensaram, porque escolheram implementar a primeira estratégia em detrimento de outra, nomeadamente questionando se havia outras formas de resolver a tarefa, permitindo-lhes explorar vários métodos por conta própria e, por fim, indicar de entre as estratégias abordadas qual a mais adequada para a tarefa proposta. No final da experiência, solicitou-se aos alunos que indicassem quais os constrangimentos sentidos na abordagem de vários processos de resolução e para indicarem qual a opinião que têm sobre a aprendizagem e o uso de múltiplas estratégias.

3.5.4. Recolha e análise dos dados

Em todas as sessões foram feitos registos das interações entre os participantes e o investigador. Estes elementos juntamente com os registos de observação não participante e as resoluções dos alunos formaram o conjunto de dados para este estudo.

Ao longo das interações entre o investigador e os participantes, o investigador teve uma participação direta, uma vez que foi necessário fornecer apoio aos alunos quando demonstraram dificuldades em prosseguir na resolução da tarefa, principalmente na exploração dos diversos processos de resolução. Note-se que as intervenções do investigador foram breves, no sentido de evitar influenciar a resolução dos alunos e os dados da investigação.

Durante o ano letivo o investigador procedeu à observação não participante dos alunos no seu ambiente natural (sala de aula), registando algumas informações sobre aspetos relevantes para o estudo, nomeadamente: (i) o interesse, empenho e participação durante a exposição dos conteúdos; (ii) a capacidade de trabalho e aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente; (iii) a capacidade de interação com o professor; (iv) a realização dos trabalhos de casa; (v) o registo dos conteúdos no caderno diário e (vi) a capacidade na abordagem de diferentes processos de resolução.

Os aspetos referidos permitiram ao investigador conhecer melhor as características individuais dos alunos e possibilitaram uma melhor decisão na escolha dos alunos que iriam participar no estudo.

Foram realizadas entrevistas não-estruturadas. As perguntas não foram definidas *a priori* e, por isso, surgiram no decorrer da interação entre o entrevistador e o entrevistado durante a realização das tarefas. Relativamente à recolha documental, no final de cada sessão foram recolhidas todas as resoluções dos alunos às tarefas propostas para uma eventual análise e possibilitar uma triangulação com as outras técnicas de recolha de dados.

Importa salientar que algumas questões resolvidas pelos alunos não foram incluídas na análise dos dados devido à escolha das melhores resoluções que possibilitam uma melhor análise atendendo aos objetivos definidos para o estudo.

Na análise foram tidos em consideração os fatores que influenciaram o processo de resolução dos alunos, os métodos de resolução por forma a recolher evidências do conhecimento do uso de múltiplas estratégias, as escolhas feitas durante os procedimentos e a respetiva justificação, as dificuldades manifestadas por cada um dos participantes no que respeita à exploração de diversos processos de resolução e a capacidade de escolha entre os diversos processos de resolução possíveis. Por fim, foram identificadas algumas semelhanças e diferenças entre os estudos de caso, procedendo-se à categorização dos fatores que influenciaram o processo de resolução, as escolhas feitas, as justificações efetuadas e as dificuldades na exploração de diferentes processos. É de referir que as análises foram efetuadas com base na revisão de literatura para uma melhor análise dos comportamentos dos intervenientes no estudo.

4. Apresentação dos dados

Neste capítulo procede-se à apresentação detalhada dos três estudos de caso considerados para esta investigação. Nos diálogos que descrevem as interações entre o investigador e os alunos, cada um dos participantes é designado pela letra inicial do nome fictício e o investigador pela letra I.

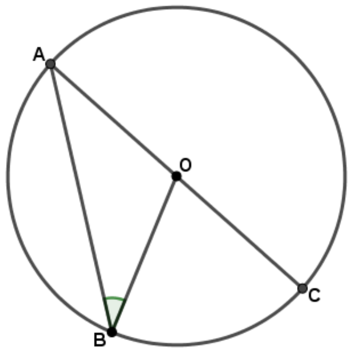
4.1. O caso de José

4.1.1. Caracterização

José, de catorze anos, é um dos melhores alunos da turma, reconhecido pelas capacidades que tem e não pelos trabalhos realizados e resultados que obteve ao longo do ano letivo. Foi o aluno que mais participou nas aulas ao longo do ano letivo, demonstrando uma certa facilidade na compreensão de novos conteúdos, mas não gosta de registar os conteúdos no caderno diário. Os resultados do aluno poderiam ser melhores se não fosse o reduzido trabalho em aula e os poucos trabalhos realizados em casa, cerca de 28% em média. José é um aluno inteligente e com boa capacidade de raciocínio e verificou-se que efetuava algumas abordagens menos comuns nos exercícios realizados em aula e nos testes relativamente ao conteúdo alvo deste estudo. O aluno não teve nenhuma retenção ao longo do seu percurso escolar e pretende seguir a área das ciências. Relativamente aos resultados na disciplina de Matemática, obteve uma classificação final de nível 4 no 7.º ano, tendo baixado para o nível 3 no 8.º ano. No que respeita ao 9.º ano, as classificações dos três períodos são respetivamente 3, 3 e 4. Podemos perceber que há um decréscimo no 8.º ano e manteve o nível nos dois primeiros períodos do 9.º ano, esse facto resultou de alguma falta de aproveitamento que a turma teve durante o 8.º ano e da falta de trabalho individual do aluno, uma vez que tem muitas capacidades, mas não soube aproveitá-la. O aluno obteve uma classificação de 76% no exame nacional de Matemática, o que não me surpreendeu dada as suas características já acima mencionadas.

4.1.2. Tarefas

Questão 1



Na figura está representada uma circunferência de centro O.

Sabe-se que:

- Os pontos A, B e C pertencem à circunferência;
- [AC] é um diâmetro da circunferência;
- O arco ACB tem amplitude $250°$.

A figura não está desenhada à escala.

Determina a amplitude, em graus, do ângulo OBA.

Quando foi proposta esta questão José começou imediatamente por fazer as contas mentalmente e depois disse que o resultado era 35 graus. Mas foi pedido ao aluno que apresentasse a sua resolução (Figura 4.1) e depois explicasse como pensou.

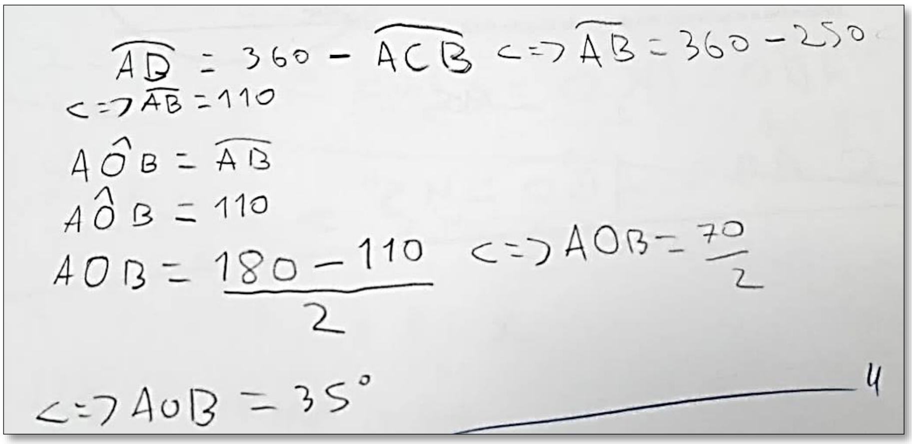


Figura 4.1 – Resolução de José à questão 1.

I – Explica oralmente como pensaste.

J – Sabemos que o arco ACB tem amplitude 250º, comecei por determinar a amplitude do arco AB e depois a amplitude do ângulo AOB que é igual ao arco AB porque é um ângulo ao centro. A soma dos ângulos internos do triângulo é 180º e os ângulos BAO e OBA são iguais.

I – Os ângulos BAO e OBA são iguais porquê?

J – Porque [AO] e [OB] são iguais, são raios da circunferência e os ângulos também são iguais.

I – Muito bem. Mas porque não pensaste noutra estratégia em vez desta?

J – Foi o que pensei logo.

Mediante a resolução inicial do aluno podemos perceber que começou por concentrar as suas ideias no triângulo [OAB] e justificou de forma conveniente o seu procedimento. No entanto, José justifica a sua primeira estratégia, como sendo aquilo que pensou de imediato.

Após ter implementado a sua primeira estratégia, o aluno foi questionado sobre a existência de uma estratégia diferente. Apesar de ter afirmado que poderá haver e após algumas tentativas teve dificuldades em prosseguir porque simplesmente não conseguia ver novos processos que conduzam ao mesmo resultado. Tendo em conta esse bloqueio, o investigador deu algumas pistas de modo a ultrapassar esse constrangimento, como se mostra no diálogo seguinte.

I – Será que há uma outra alternativa?
J – Deve haver, mas não estou a ver.
I – Vê lá se consegues arranjar uma outra alternativa.
J – O arco ABC é 180º e podíamos subtrair … Não estou a ver nenhuma.
I – Pensa lá mais um bocadinho, acho que consegues chegar lá.
J – Este aqui… não sei.
I – E se começares primeiro por determinar o arco BC.
J – Não sei.
I – Não sabes como chegar ao arco BC?
J – Não.
I – Se calhar estás a esquecer dos dados que tu tens. O que sabes sobre o arco ACB?
J – Tem amplitude 250º. Ah então é 250º menos 180º.
I – Muito bem! E então?
J – O arco BC é 70º e o ângulo AOB é 180º menos 70º. Depois como a soma dos ângulos internos do triângulo é 180º e os dois ângulos são iguais chegamos ao resultado.

Como se pode ver no diálogo anterior, mesmo com a ajuda do investigador, José revelou algumas dificuldades em determinar a amplitude do arco BC, necessitando de uma segunda ajuda. Por outro lado, uma vez mais percebe-se que o aluno concentrou as suas ideias no triângulo, diferenciando apenas no conjunto das etapas que implementou inicialmente. Quando confrontado com essa escolha, justifica que o ângulo pretendido é um dos ângulos internos do triângulo e que seria mais difícil efetuar outro procedimento. Portanto sem efetuar uma análise detalhada, considera que o seu procedimento é mais fácil.

I – Porque é que tu te focaste em encontrar primeiro a amplitude do ângulo AOB?
J – Como eles fazem parte do mesmo triângulo, era mais fácil encontrar os outros ângulos do triângulo.
I – Quer dizer que não conseguias chegar ao ângulo OBA sem determinar o ângulo AOB?
J – Acho que conseguia, mas era mais difícil.
I – Será? Quando determinaste o arco BC porque não pensaste em relacionar diretamente a amplitude do arco BC com a amplitude de um dos ângulos internos do triângulo OAB?
J – Ah sim, o ângulo CAB é metade do arco BC.
I – Porquê? Que tipo de ângulo é o CAB?
J – Já não me lembro.
I – O ângulo CAB é inscrito.
J – Pois é.
I – Então determinando o arco BC conseguimos chegar ao ângulo CAB. E depois?
J – E depois o ângulo CAB é igual ao ângulo OBA.
I – Muito bem!
J – Assim é mais rápido. Não tinha pensado nessa forma.

No diálogo anterior, apesar do aluno relacionar bem o arco BC e o ângulo BAC não se lembrava como se designa um ângulo de vértice sobre a circunferência cujos lados contêm cordas. Além disso, apercebeu-se que o processo efetuado nesta última abordagem é mais rápido, mas que não lhe ocorreu.

Quanto à exploração de um novo processo, no diálogo seguinte é percetível a dificuldade do aluno em explorar uma nova estratégia de resolução, bem como a forma como uma pequena intervenção do investigador conseguiu facilmente chegar ao resultado pretendido

I – Mas será que ainda existe uma outra forma?
J – Não faço ideia.
I – O que geralmente se faz quando se procura um ângulo inscrito?
J – Procurar o arco.
I – E então?
J – Mas não vejo o arco. Ah! Se eu prolongar o [BO] dá. [prolongou e marcou um ponto B']
I – Exatamente. E depois?
J – E depois se eu descobrir o BOC descubro o AOB'. Depois…. Ah! Depois AB' mede o mesmo que AOB' e OBA é metade de AB'.
I – Muito bem. Entre as resoluções possíveis qual tu consideras mais adequada para esta questão?
J – A terceira.
I – Porquê?
J – Porque é mais rápido.

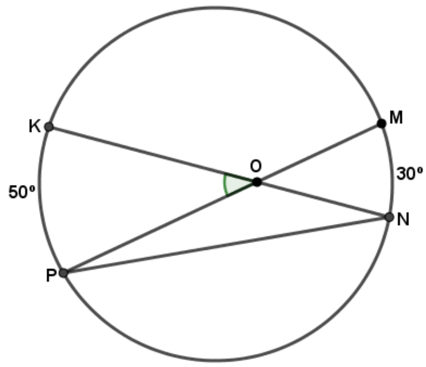
No que se refere à escolha do melhor processo, para José o terceiro processo é mais adequado porque demora menos tempo a ser concretizado.

Questão 2

Na figura está representada uma circunferência.

Sabe-se que:

- Os pontos K, M, N e P pertencem à circunferência;
- O ponto O é o ponto de interseção das cordas [KN] e [MP];
- O arco KP tem amplitude 50°;
- O arco MN tem amplitude 30°.



A figura não está desenhada à escala.

Determina a amplitude, em graus, do ângulo KOP.

Após o aluno ter pensado por alguns instantes, referiu que não se lembrava de como se calcula o ângulo. Não lembrar, talvez não fosse a frase correta. Talvez o mais adequado seja dizer que demonstrou dificuldades em designar e diferenciar os ângulos de vértice no interior e exterior da circunferência. Após alguma orientação do investigador o aluno apresentou a sua primeira resolução (Figura 4.2).

J – Não me lembro como é que se calcula aquele ângulo.
I – Já não te lembras?
J – Acho que é a soma daquelas amplitudes a dividir por 2.

I – Não sei, porquê? Que tipo de ângulo é aquele?
J – Não me lembro.
I – Então quais são os tipos de ângulos que vimos na aula?
J – Inscrito, ao centro e… não me lembro do nome dos outros… sei que há um que tem vértice dentro da circunferência que não fica no centro e outro fora da circunferência.
I – Exato! E os que têm vértice dentro, é como tinhas dito é obtido fazendo a semissoma dos arcos e chamam-se ângulos excêntricos.
J – Ah, sim.
I – Agora apresenta a tua resolução.

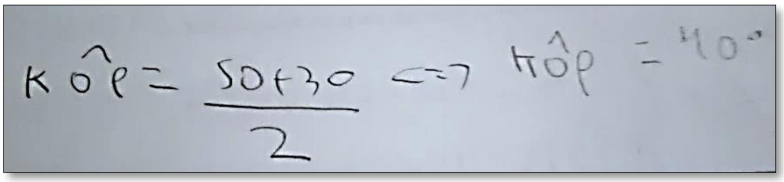


Figura 4.2 – Resolução de José à questão 2.

Tal como ilustrado no diálogo seguinte o aluno, apesar de ter algumas dificuldades em avançar, não abandonou a sua estratégia porque lhe parecia mais óbvia e direta, mesmo tendo confundido algumas noções. Apesar do aluno ter afirmado, talvez sem ter consciência porque não explorou outras resoluções, a sua resolução era realmente a mais óbvia, mas podia muito bem ter desistido daquela ideia perante a confusão que gerou, mas decidiu insistir.

I – Já que tinhas dificuldades em avançar, porque não pensaste noutro procedimento?
J – Porque esta pareceu-me mais óbvia e direta.
I – Mas consegues pensar noutra alternativa?
J – Os arcos KM e PN são iguais.
I – São iguais? Tens a certeza? O que garante que eles sejam iguais?
J – São porque os ângulos KOM e PON são verticalmente opostos.
I – Então escreve o que estás a pensar.

No diálogo anterior, o aluno, quando impulsionado, tenta implementar uma nova estratégia considerando que os arcos KOM e PON têm a mesma amplitude, apresentando uma resolução errada (Figura 4.3), apesar do resultado coincidir com a amplitude do ângulo pretendido. Portando, depois do aluno ter assumido que o ângulo KOP era um ângulo excêntrico na sua primeira estratégia, desta vez a sua ideia revela que poderá ter assumido que o ponto O é o centro da circunferência, sendo este o único caso em que os arcos teriam efetivamente a mesma amplitude. O diálogo mostra que o aluno não tinha muita certeza dos seus procedimentos, mas ainda assim decidiu avançar.

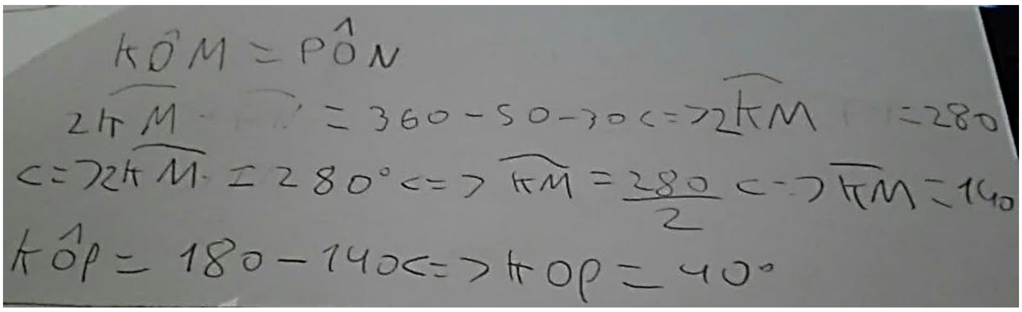


Figura 4.3 – Segunda tentativa de resolução de José à questão 2.

I – Achas que tudo o que fizeste está bem?
J – Acho que sim.
I – Achas, mas não tens a certeza. Quando é que tu podes garantir que aqueles dois arcos são iguais?
J – Quando os ângulos forem iguais.
I – Então, tu não tinhas dito que os ângulos de vértice em O não são ângulos ao centro? Deves estar a aplicar alguma propriedade que não podes aplicar neste caso. Se for como estás a afirmar, porque é que na figura os arcos KP e MN não têm a mesma amplitude?
J – Ah, pois é! Não têm.

Após a sua tentativa frustrada de resolução, o aluno foi incentivado a explorar uma nova resolução. Então, determinou os ângulos internos do triângulo [NOP]. Importa salientar que o aluno já havia pensado nesta estratégia na questão anterior, mas não chegou a explorar essa estratégia na primeira e segunda tentativa de resolução.

I – Então tenta explorar outra forma.
J – Ah, o MPN é 15º e KNP é 25º. Depois determinamos PON pela soma dos ângulos internos. Depois determinávamos KOP que é suplementar do PON.
I – Muito bem! Entre as duas resoluções corretas o que percebes melhor?
J – Ambas, mas achei mais fácil a primeira porque tem menos cálculos.

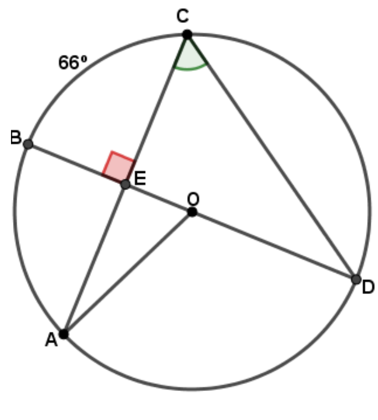
Outro aspeto relevante é a escolha entre as duas resoluções possíveis em que o aluno apesar das dificuldades considera que percebe bem as duas estratégias, mas que a primeira é a mais fácil porque envolve menos cálculos.

Questão 3

Na figura está representada uma circunferência de centro O.

Sabe-se que:

- Os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência;
- [BD] é um diâmetro da circunferência;
- A reta BD é perpendicular à corda [AC] no seu ponto médio;
- O ponto E é o ponto de interseção das cordas [BD] e [AC];
- O arco BC tem amplitude 66°.



A figura não está desenhada à escala.

Determina a amplitude, em graus, do ângulo ACD.

Quando foi proposta esta questão, José rapidamente apresentou a resolução da Figura 4.4. Um dado importante é o facto de o aluno começar por analisar duas estratégias e escolher a que considerou mais apropriada. Apesar de saber implementar as duas estratégias em que pensou, escolheu a segunda estratégia por ser mais fácil e permitir chegar mais rapidamente à solução pretendida.

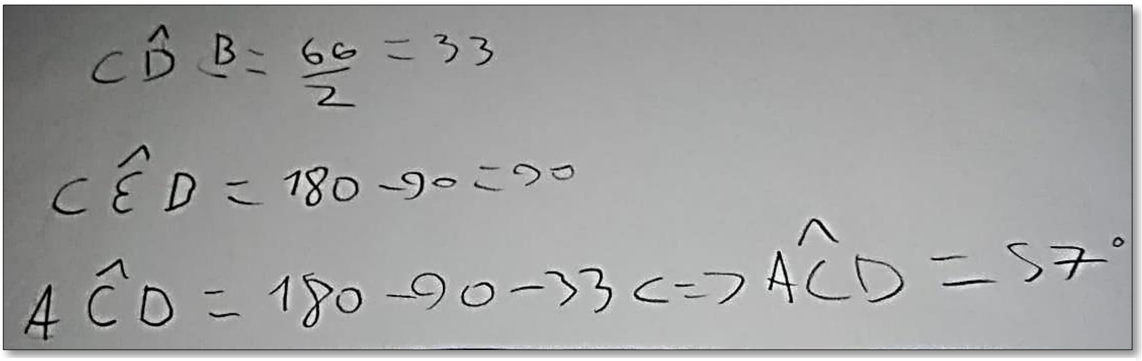


Figura 4.4 – Resolução de José à questão 3.

I – Deu-me impressão que desta vez tentaste ver qual era a proposta de resolução mais fácil.
J – Sim.
I – A resolução que tu apresentaste era a tua ideia inicial?
J – Não. Estava a pensar calcular o ângulo AED que também é 90. Mas depois percebi que era mais complicado e pensei noutra forma.
I – Mas a estratégia inicial conduzia à resposta ou não?
J – Conduzia, mas ia ser mais complicado. Ia ter que calcular o arco AD, pelo ângulo excêntrico AED. Depois chegava ao ângulo ACD.
I – Muito bem!

Tal como aconteceu nas questões anteriores o aluno teve algumas dificuldades em implementar uma nova estratégia diferente daquelas em que tinha pensado. No diálogo seguinte podemos perceber que o aluno não leu o enunciado porque prefere ver a figura, justificando que entende melhor as questões pelas informações da figura. Portanto o foco que o aluno depositou na figura, considerando que as informações da figura eram suficientes, contribuiu para os obstáculos que teve em implementar novas estratégias. Além disso, é o facto de não perceber o que a nova informação poderá acrescentar, que mostra alguma falta de conhecimento da matéria por parte do aluno.

I – Há mais alguma hipótese de chegar à resposta? (…) Não estás a conseguir ver?
J – Não.
I – Leste o enunciado?
J – Não.
I – Então como percebeste o que se queria, se não leste o enunciado?
J – Li apenas a última frase para saber que ângulos querem.
I – Tu conseguiste responder porque tinhas informação na figura, não foi?
J – Sim. Eu prefiro ver a informação na figura porque eu percebo melhor e se não tiver informação suficiente é que vou ler o enunciado.
I – Ok. Mas só que não leste e estavas a ter dificuldades em pensar noutra estratégia porque não leste o enunciado. (…) Alguma das informações te ajudam? Por exemplo, no enunciado consta que a reta BD é perpendicular à corda [AC] no seu ponto médio e diz respeito a uma das propriedades que nós vimos na aula.
J – Não vejo como isso me pode ajudar.
I – Qual é a relação entre as amplitudes dos arcos BC e AB?
J – Têm a mesma amplitude.
I – Sim. E o que nos garante isso é aquela propriedade. Agora consegues avançar?
J – O ângulo BOA é 66. E o ângulo OAE é 24.
I – Mas isso ajuda?

J – Não estou a ver.
I – Pensa lá um bocadinho.
J – Já pensei.
I – O que nos ajuda a determinar a amplitude do ângulo inscrito.
J – Se soubermos a amplitude do arco.
I – Ou do ângulo ao centro com o mesmo arco, não é?
J – Sim. Então determinamos o ângulo AOD que é suplementar do BOA e depois obtemos o ângulo ACD.

Relativamente ao diálogo anterior o aluno demonstra alguma falta de capacidade em avaliar se um determinado procedimento ajuda ou não a determinar o ângulo pretendido, uma vez que determinou o ângulo OAE e este não acrescentou nada à sua resolução. Na tentativa de explorar uma nova estratégia, o aluno afirma com alguma certeza que não existe tal estratégia. Portanto, à medida que vão surgindo novas estratégias, tal facto reduz a capacidade do aluno em explorar uma nova. Havia outras formas de determinar a amplitude do arco AD percorrendo outras etapas ou efetuando alguma alteração no conjunto das etapas que efetuou anteriormente, mas foi necessária uma intervenção do investigador para que o aluno percebesse o que se pretendia.

I – E se te perguntar se haveria mais alguma hipótese, o que dirias?
J – Duvido.
I – Será? Não existirá outra forma de encontrar o arco AD?
J – Calcularmos o arco CD que é igual ao AD?
I – Usando aquela propriedade que nós vimos?
J – Sim.
I – E depois?
J – Como CD é 180 menos 66, que dá 114 o AD também é 114.

O facto de José não ler o enunciado completo ou pelo menos não leu com a devida atenção, isso de certa forma prejudicou o seu raciocínio. Havia algumas informações que só o enunciado podia garantir a sua veracidade. Por outro lado, o aluno não conseguiu vislumbrar mais um conjunto de etapas possíveis para determinar a amplitude do arco AD, certamente por alguma falta de informação. Sendo a amplitude do arco AB 66º e tendo em conta que [BD] é um diâmetro, facilmente chegaria à amplitude do arco AD. Esse facto fez o José pensar sobre a importância de ler sempre o enunciado.

I – Certo, mas há ainda outra hipótese. Consegues ver?
J – Não consigo.
I – Nas etapas que tu percorreste à pouco, quando determinaste o arco AB, escolheste o mais difícil. Mas sabendo o arco AB não descobres de imediato o arco AD?
J – É 180 menos 66.
I – Pois claro. Como BD é diâmetro determinamos logo. Percebeste que ler as informações do enunciado é importante?
J – Sim.
I – Na tua opinião qual das resoluções é mais adequada?
J – A que fiz.
I – Porquê?
J – Achei mais fácil que as outras.
I – Para ti fácil quer dizer o quê?
J – Tem menos cálculos e dá menos trabalho para fazer.

Comparando os processos de resolução, José considera a sua estratégia mais adequada por ser mais fácil. Para o aluno “fácil” significa o que exige menos cálculos e seja menos cansativo, isto é, menos passos para resolver a questão. Mas a opinião de José também poderá estar relacionada com o facto das outras estratégias envolverem uma propriedade que lhe suscita alguma dificuldade.

Questão 4

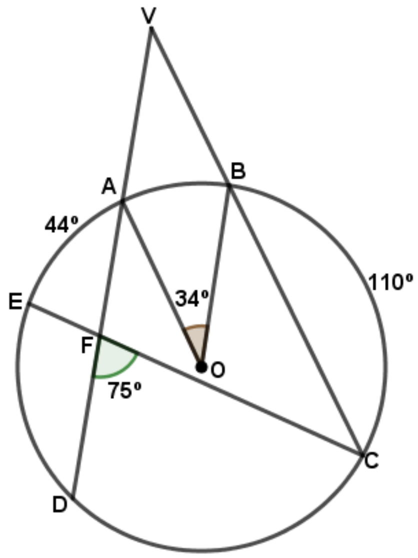
Na figura está representada uma circunferência de centro O.

Sabe-se que:

- os pontos A, B, C, D e E pertencem à circunferência;
- as cordas [AD] e [BC] têm o mesmo comprimento;
- F é o ponto de interseção das cordas [EC] e [AD];
- V é o ponto de interseção das retas AD e BC;
- o arco EA tem amplitude 44º;
- o arco BC tem amplitude 110º;
- o ângulo AOB tem amplitude 34º;
- o ângulo CFD tem amplitude 75º.

A figura não está desenhada à escala.

Qual é a amplitude, em graus, do ângulo CVD?



O aluno começou por pensar numa estratégia e quando percebeu que era um processo mais complicado desistiu da ideia e tentou uma nova estratégia como se pode ver na Figura 4.5 e no diálogo que a seguir se apresenta. Note-se que a justificação do aluno para descartar a primeira tentativa de resolução assenta, de alguma forma, na duração da execução da tarefa e no número total de etapas necessárias para a sua resolução. José interrompeu a sua resolução para avaliar, por um lado, a eficiência da sua estratégia inicial e por outro, a existência de uma nova estratégia que para ele fosse mais eficiente.

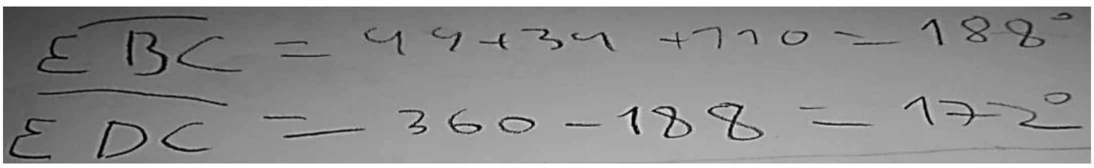


Figura 4.5 – Tentativa de resolução de José à questão 4.

I – Porque desististe da ideia inicial?
J – Estava a pensar determinar o arco DC. Determinei o arco EBC e depois o arco EDC e percebi que teria que determinar também o arco ED. Ia ter que usar o ângulo excêntrico EFD e o arco AC.
I – Achas que não estavas a pensar bem?
J – Estava. Só que ia ser mais complicado fazer.
I – Mesmo que seja complicado, conseguias chegar lá?
J – Sim.

I – Na tua segunda ideia como pensaste?
J – Fui à procura do arco DC usando o ângulo excêntrico DFC e depois determinei o ângulo que eles pedem.

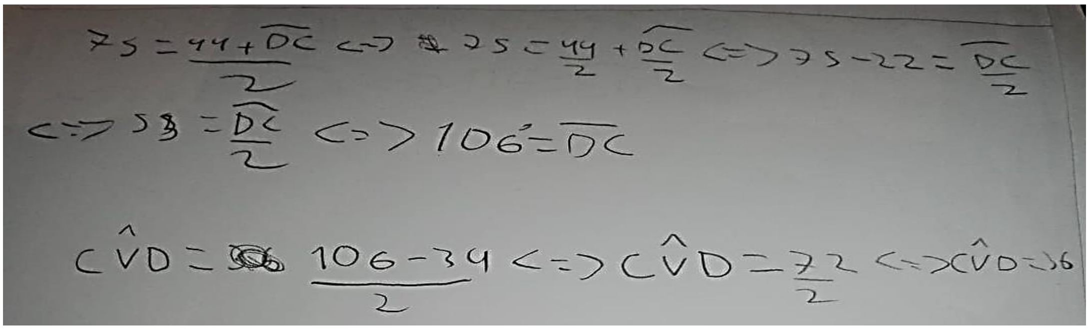


Figura 4.6 – Resolução de José à questão 4.

É relevante salientar que o aluno percebeu que o ângulo que se pretendia era um ângulo excêntrico, portanto teria que ir à procura do arco DC e para isso precisava encontrar primeiro o arco ED. Efetivamente a forma como ele estava a pensar, não deixa de ser um procedimento correto, mas era mais trabalhoso. No entanto, o mais importante é o facto de ter reconhecido isso e reagido de imediato explorando uma nova forma de resolução (Figura 4.6).

Não deixa de ser curioso o facto de José ter implementado a segunda estratégia, pensando de novo num ângulo excêntrico, mas que considerou mais fácil quando comparado com a estratégia inicial. A atitude do aluno faz-nos colocar a questão: se era uma estratégia que envolvia menos cálculos porque não pensou nisso primeiro? Esse facto poderá ter a ver com as características próprias do aluno, ou seja, a maioria das vezes tenta fazer uma abordagem menos comum, ou melhor dizendo, tem tendência em optar por um procedimento mais cansativo.

Quanto à abordagem de uma nova estratégia, ainda mais eficiente do que as duas primeiras estratégias que implementou para encontrar o arco AD, o aluno afirma, tal como se pode ver no diálogo seguinte, que não lhe ocorre nenhuma. É possível observar que José tem algumas dificuldades em fazer o uso de determinadas informações que permitiriam facilitar a exploração de uma nova forma de resolução. Apesar de ter lido o enunciado demonstrou dificuldades em perceber o que acrescenta ao seu raciocínio o facto das cordas [ED] e [BC] terem o mesmo comprimento, obstáculo imediatamente ultrapassado com a ajuda do investigador.

I – Mas, porque não tentaste explorar uma outra forma de chegar ao arco ED?
J – Não estou a ver.
I – Desta vez leste o enunciado?
J – Sim, li.
I – Não tens nenhuma informação no enunciado que te ajuda a chegar ao arco ED?
J – Não sei qual é.
I – O facto das cordas [AD] e [BC] terem o mesmo comprimento, o que podes concluir?
J – Ah, então o arco AD também é 110!
I – Muito bem e desta forma chegavas facilmente ao arco ED e depois ao arco DC.

Tal como aconteceu nas questões anteriores, à medida que o aluno vai tendo contacto com novas abordagens, reduz significativamente a sua capacidade de explorar novas estratégias, muitas vezes porque considera que já não existem mais hipóteses. Não deixa de ser importante averiguar a existência de uma nova estratégia que José já tinha implementado tantas vezes, mas que segundo afirma não consegue ver e esse facto é muito interessante. Por um lado, essa atitude é benéfica no sentido de desenvolver a sua capacidade de criar o seu próprio método de resolução, mas por outro, não beneficia de estratégias que já tinha implementado e que em certos casos poderão ser mais adequadas.

Como podemos constatar, no seguinte diálogo o aluno determinou um dos ângulos internos do triângulo [CFV], porque considerou que poderia ajudar, mas teve dificuldades em decidir a sua utilidade porque não tinha o foco no triângulo.

> I – Percebi que numa das tuas resoluções tinhas determinado a amplitude do ângulo ECB. Porque o fizeste?
> J – É só porque achei que ia dar jeito.
> I – Continuas a achar que não dá jeito?
> J – Não estou a ver.
> I – Não consegues pensar em nenhum exercício que já fizeste e que poderá ajudar?
> J – Não.
> I – No exercício anterior por exemplo qual foi a tua ideia inicial?
> J – Pensei num triângulo.
> I – Então porque não pensaste outra vez num triângulo.
> J – Porque eu gosto de pensar só no exercício que estou a fazer.
> I – Agora percebeste o que podias ter feito?
> J – Claro, podia ter ido pela soma dos ângulos internos do triângulo CFV.
> I – Não estavas a ver o triângulo?
> J – Não estava a pensar nisso.

Uma das estratégias para esta tarefa que José disse não ter existido, consistia em aplicar a propriedade do ângulo externo CFD do triângulo [CVD], uma vez que a sua amplitude é a soma das amplitudes de dois ângulos internos não adjacentes. Esta é uma das propriedades que a professora titular referiu algumas vezes na aula, mas os alunos revelavam obstáculos em abordá-la. Percebe-se que tem algum conhecimento da propriedade, mas não soube explicar bem a relação entre as amplitudes do ângulo externo e as amplitudes dos ângulos internos não adjacentes porque não se lembrava.

> I – Ocorre te mais alguma ideia?
> J – Não.
> I – Consegues determinar o ângulo CVD, usando o menor número de passos possível e que envolve menos cálculos?
> J – Não faço ideia. Acho que não dá.
> I – Que tipo de ângulo é aquele [ângulo CFD] relativamente ao triângulo CVD?
> J – É um ângulo externo.
> I – O que tu sabes sobre um ângulo externo de um triângulo?
> J – É a soma do ângulo externo e do seu ângulo interno.
> I – Soma do ângulo externo e do interno?
> J – Não sei explicar bem…Não me lembro bem da propriedade.

I – A amplitude de um ângulo externo é a soma das amplitudes de dois ângulos internos não adjacentes, certo?
J – Ah, pois é! Tínhamos falado isso na aula. Então o ângulo CVD é igual ao ângulo CFD menos o ângulo FCV. Afinal havia outra forma.
I – Entre as estratégias que já vimos o que consideras mais adequada?
J – Calcular a soma dos ângulos internos do triângulo.
I – Porquê?
J – Porque percebo melhor, é mais direta e exige saber menos coisas.

No que se refere à abordagem mais adequada para esta tarefa o aluno elege a estratégia da soma dos ângulos internos do triângulo como favorita. Mediante essa escolha importa-nos referir três aspetos: em primeiro lugar, não considerou que a resolução que ele fez é a melhor, o que mostra algum critério do aluno na escolha. Em segundo lugar, optou talvez por uma estratégia que lhe parecesse mais familiar e que teria menos dificuldades em implementar apesar de não ter sido a primeira estratégia em que ele pensou. Em terceiro lugar, faz-nos pensar até que ponto José analisou que a estratégia da soma dos ângulos internos é efetivamente a melhor, uma vez que justifica ser a mais direta e que é necessário saber menos conteúdos. Na Tabela 4.1 é efetuada uma comparação entre duas estratégias, sendo uma delas a que o aluno escolheu.

Tabela 4.1 – Comparação entre duas estratégias possíveis para a questão 4.

Estratégia	**Somar os ângulos internos do triângulo [CVF]**
Resolução	Passo 1: $\widehat{AB} = A\hat{O}B \Leftrightarrow \widehat{AB} = 34°$ Passo 2: $E\hat{C}B = \frac{44°+34°}{2} \Leftrightarrow E\hat{C}B = 39°$ Passo 3: $C\hat{F}V = 180° - 75° \Leftrightarrow C\hat{F}V = 105°$ Passo 4: $C\hat{V}D = 180° - 39° - 105° \Leftrightarrow C\hat{V}D = 36°$
O que o aluno deve saber	• A amplitude de um ângulo inscrito é igual à amplitude do arco correspondente; • A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco correspondente; • A soma das amplitudes de dois ângulos adjacentes é igual 180°; • A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.
Estratégia	**Aplicar a propriedade dos ângulos externos do triângulo [CVF].**
Resolução	Passo 1: $\widehat{AB} = A\hat{O}B \Leftrightarrow \widehat{AB} = 34°$ Passo 2: $E\hat{C}B = \frac{44°+34°}{2} \Leftrightarrow E\hat{C}B = 39°$ Passo 3: $75° = 39° + C\hat{V}D \Leftrightarrow C\hat{V}D = 75° - 39° \Leftrightarrow C\hat{V}D = 36°$

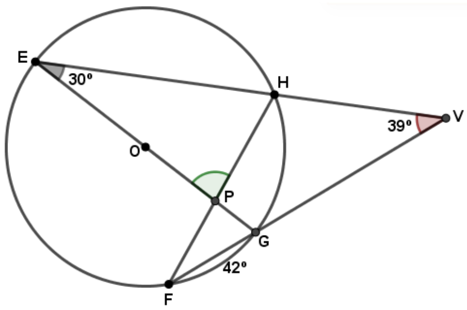
O que o aluno deve saber	• A amplitude de um ângulo inscrito é igual à amplitude do arco correspondente; • A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco correspondente; • A amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.

Portanto, teoricamente a segunda estratégia é a melhor, mas não foi escolhida pelo aluno. Claro que a eficiência de uma tarefa depende muitas vezes do contexto, do individuo e da própria tarefa tal como afirmam os autores Newton *et al.* (2010). Apesar de ter escolhido bem entre a estratégia que usou para resolver a tarefa e a estratégia da soma dos ângulos internos do triângulo, não teve a mesma capacidade de analisar entre esta e a dos ângulos externos do triângulo, porque certamente preferiu optar pela familiaridade ou porque do seu ponto de vista lhe parece mais acessível.

Questão 5

Na figura está representada uma circunferência de centro O em que:

- E, F, G e H são pontos da circunferência;
- [EG] é um diâmetro da circunferência;
- O ponto P é o ponto de interseção de [EG] com [FH];
- O ponto V é o ponto de interseção das retas EH com FG;
- O ângulo EVF tem amplitude 39º;
- O ângulo GEH tem amplitude 30º;
- O arco FG tem amplitude 42º.



Qual é amplitude, em graus, do ângulo EPH?

Após o aluno ter pensado por breves instantes, apresentou a sua primeira resolução patente na Figura 4.7. Pelo diálogo seguinte percebe-se que antecipou um conjunto de estratégias e decidiu implementar o que lhe pareceu mais fácil. De acordo com José, encontrar o arco EF e aplicar de imediato a propriedade do ângulo excêntrico era a estratégia mais fácil.

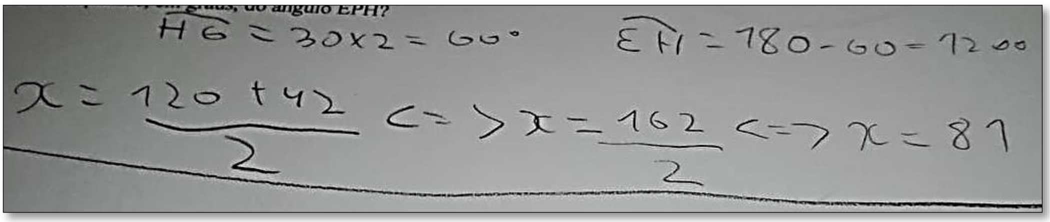


Figura 4.7 – Primeira resolução de José à questão 5.

I – Antes de apresentar a tua resolução pensaste primeiro em várias estratégias?
J – Sim.
I – De acordo com a tua resolução, a tua ideia foi ir logo à procura do arco EH e como já sabias o arco FG, usaste logo a propriedade do ângulo excêntrico?
J – Sim.
I – Alguma razão especial para teres optado por aquele caminho?
J – É o mais fácil que consegui ver. Acho que é.
I – Vamos então analisar outras hipóteses. Qual é a outra forma que estás a pensar?

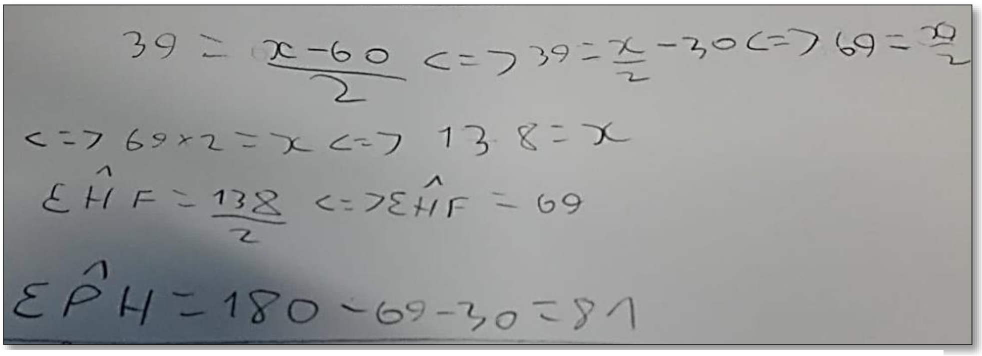


Figura 4.8 – Segunda resolução de José à questão 5.

I – A tua segunda ideia foi encontrar a amplitude do ângulo EHP. Explica como pensaste.
J – Pensei em ir à procura do arco EF que dava logo o ângulo que eu quero. Usei a propriedade do ângulo excêntrico EVF para encontrar o arco EF.
I – Correto. Mas há algum processo diferente para obter o arco EF?
J – Sim, podia usar os arcos HG, EH e FG fazendo 360-120-60-42.
I – Sim era uma hipótese. Mas há uma forma mais fácil ainda de calcular o arco EF.
J – Ah! É fazer 180 menos 42, que é muito mais rápido.
I – Ah, pois! Muito bem!

José conseguiu implementar sem grandes dificuldades uma segunda estratégia (Figura 4.8), privilegiando mais uma vez as propriedades dos ângulos excêntricos. É importante salientar a rapidez e a eficácia do aluno em aplicar uma segunda estratégia, algo que tinha acontecido com alguma dificuldade nas questões anteriores. Além disso, analisando a segunda estratégia, percebe-se que optou por um conjunto de etapas que envolvem mais cálculos para encontrar o arco EF e posteriormente o ângulo pretendido. É importante salientar dois aspetos que me parecem particularmente relevantes: a primeira consiste em explorar a capacidade de o aluno decidir entre duas ou mais estratégias diferentes qual é a melhor para a tarefa e a segunda perceber a sua capacidade em modificar uma estratégia reduzindo o número de etapas da mesma. Havia outra forma de encontrar o arco EF envolvendo menos etapas, mas apenas percebeu isso depois, quando solicitado pelo investigador.

Na Figura 4.9 consta uma outra estratégia possível para a resolução da tarefa que José apresentou sem grandes dificuldades e justificou de forma conveniente.

I – Mais alguma estratégia que podemos aplicar para determinar o EPH?
J – Podemos pensar no triângulo pequenino FPG. Temos o ângulo HFG que é 60 dividir por 2 e aqui [ângulo EGV] podíamos fazer 180-30-39 que dá 111. Depois 180-111 dá o PGF e a soma dos ângulos internos dá o GPF que é verticalmente oposto com EPH.
I – Muito bem, José!

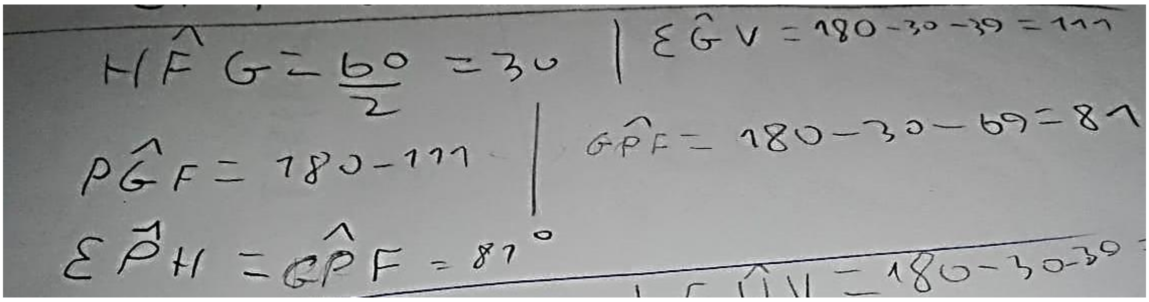


Figura 4.9 – Terceira resolução de José à questão 5.

Após implementar a terceira resolução, José consegue perceber uma nova estratégia diferente das que já foram vistas até o momento (Figura 4.10). Ao perceber que o ângulo HPG é interno ao quadrilátero [HPGV] e adjacente ao ângulo pretendido, recorreu ao facto da soma dos ângulos internos do respetivo quadrilátero ser igual a 360º. Parece-nos relevante salientar que o aluno melhorou significativamente a sua capacidade de explorar novas estratégias, tornando-se cada vez mais flexível.

I - Já se esgotaram todas as hipóteses?
J - Podemos também pensar no quadrilátero [HPGV]. Determinamos o ângulo EGV pela soma dos ângulos internos do triângulo [EGV], depois o ângulo FHV pelo triângulo [FHV]. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º, determinámos o ângulo HPG que é suplementar do EPH.
I – Muito bem!

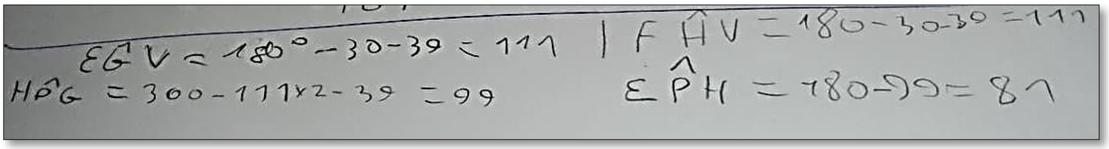


Figura 4.10 – Quarta resolução de José à questão 5.

Outra estratégia talvez a menos óbvia para José consistia em pensar no triângulo [EFP], começando por traçar o lado [EF]. Para desbloquear a situação, o investigador ajudou o aluno, tendo o mesmo conseguido de imediato implementar a estratégia em causa. Constatou-se que o aluno teve um certo receio de mexer na figura por alguma insegurança de estar a fazer algo errado, tal como o mesmo destacou.

I – E qual seria uma outra alternativa?
J – Não estou a ver.
I – E se tentares desenhar ou traçar algo na figura?
J – Ah! podemos traçar o segmento [EF].
I – Porque não tinhas pensado nisso?

J – Acho mais seguro não mexer na figura. Penso que estou a fazer mal.
I – Ok. Continua.
J – Este aqui é 90 [ângulo EFG].
I – Porquê?
J – [EG] é um diâmetro, o arco EHG é 180º. Depois o ângulo EFP é 90 menos 30 que é 60 que também dá para calcular pelo arco EH, fazendo 120 a dividir por 2. Este aqui [ângulo FEG] é 21 porque é metade do arco FG. Agora fazemos 180-21-60 que dá o ângulo EPF que é suplementar com o ângulo EPH.
I – Qual das resoluções achaste mais apropriada?
J – O que eu fiz primeiro é mais fácil.
I – Então quer dizer que desta vez consideras que usar os triângulos é um processo mais demorado e mais complicado?
J – Sim, porque desta vez tinha que fazer mais cálculos para encontrar os ângulos internos do triângulo.

No que concerne à escolha de uma estratégia mais apropriada para esta tarefa, José escolhe o que fez primeiro e isso merece especial atenção. Enquanto que nas outras questões optou por escolher uma estratégia que envolve a soma dos ângulos internos de um triângulo, desta vez José analisa e reconhece que neste caso essa estratégia já não é a melhor. Na perspetiva de José a estratégia mais adequada para uma determinada tarefa é aquela que envolve menos cálculos, menos conteúdos e menos tempo a ser concluída. Na nossa opinião por trás da escolha da melhor estratégia do aluno está subjacente a sua consciência de que os processos que demoram mais tempo e que muitas vezes implementa poderão não ser as melhores para uma determinada tarefa.

No final da experiência, José foi questionado sobre as dificuldades que revelou no uso de múltiplas estratégias. O aluno indicou aspetos relacionados com o hábito e o conhecimento dos conteúdos.

I – O que influenciou a tua abordagem na exploração de diversos processos de resolução?
J – Não era uma coisa que eu fazia sempre.
I – Mais alguma coisa?
J – Havia também propriedades que não sabia aplicar.

Também foi questionado sobre a importância que atribui à aprendizagem e uso de múltiplas estratégias.

I – Consideras que aprendeste alguma coisa com esta experiência?
J – Sim.
I – O quê, por exemplo?
J – Aprendi a olhar para o mesmo exercício de formas diferentes.
I – Qual a importância de aprender a resolver um exercício de várias formas?
J – Dava para resolver os exercícios mais rapidamente, fazendo menos cálculos.

Na opinião de José a experiência teve uma influência positiva no desenvolvimento da sua capacidade ou perceção no que se refere à exploração de diversos processos de resolução. Relativamente à aprendizagem e uso de múltiplas estratégias, José considera que é importante porque contribuiu para a eficiência da resolução.

4.1.3. Análise final

Fatores que influenciaram o processo de resolução

Durante o processo de resolução de José, houve alguns aspetos que influenciaram o seu desempenho, durante a implementação de uma estratégia, bem como, na tentativa de explorar novas estratégias de resolução. Um dos principais obstáculos consistiu na leitura do enunciado onde o aluno manifestou preferência por recolher informações apenas na figura considerando que assim percebe melhor. Desta forma, o reduzido foco numa parte do enunciado que, por vezes, contém informações que não constam na figura e que auxiliam o aluno durante o seu processo de resolução ou na procura por novas formas de chegar ao resultado pretendido, contribuiu para alguns constrangimentos que manifestou. No entanto, em algumas situações o aluno leu o enunciado, mas apresentou dificuldades em perceber a utilidade de algumas informações que poderiam auxiliar a sua resolução, demonstrando assim alguma falta do conhecimento dos conteúdos. Na parte inicial da experiência, o aluno não diferenciou com facilidade algumas propriedades, tendo usado indevidamente as mesmas.

Escolhas feitas e justificação

De uma forma geral, durante e após a resolução das tarefas, José soube justificar de forma conveniente grande parte dos procedimentos adotados. Quanto à justificação para a escolha das primeiras estratégias implementadas pelo aluno, foi possível identificar um conjunto de argumentos: (i) na fase inicial da experiência, a primeira resolução apresentada pelo aluno foi motivada pelo seu pensamento, ou seja, após ter pensado numa primeira estratégia implementou-a de imediato, sem efetuar qualquer análise acerca da sua eficiência; (ii) outra justificação apresentada pelo aluno está relacionada com o que ele considera uma abordagem mais óbvia e direta e considerando que outro procedimento seria mais difícil e (iii) à medida que decorreu a experiência o aluno foi desenvolvendo a sua capacidade de decisão por duas razões: o aluno começou a desistir de uma determinada estratégia após algumas etapas de resolução, porque percebeu que existiam outras estratégias que envolviam um menor número de etapas; antes de José apresentar a sua primeira resolução, começava por analisar um conjunto de estratégias e escolher a que considerava mais fácil, ou seja "mais rápida", com " menos cálculos", "menos complicada" e que exigisse saber "menos conteúdos".

Dificuldades na exploração de diversos processos de resolução

Nas primeiras questões propostas o aluno demonstrou algumas dificuldades em explorar outros processos de resolução após a sua primeira tentativa. Na maioria das vezes, quando solicitado a explorar uma alternativa de resolução, o aluno tendia a responder "não estou a ver" revelando alguma falta de autonomia em explorar a existência de uma estratégia diferente. No entanto, quando recebia ajuda do investigador conseguia facilmente implementar uma nova estratégia de interesse.

À medida que José tem conhecimento de novas estratégias, reduz a sua capacidade de explorar uma outra estratégia e esse facto contribuiu para a sua falta de eficácia. Outra dificuldade nessa exploração é por vezes a certeza que o aluno tem de que já não existem mais estratégias.

O facto de ser a primeira experiência no contacto com estas abordagens foi também um dos motivos que influenciaram a prestação do aluno na exploração de diversos processos.

Critérios de escolha entre os diversos processos de resolução

Quanto à escolha do processo de resolução mais apropriado, geralmente José escolhe aquela que envolve menos cálculos, menos etapas e menos conteúdos, independentemente de esta ser uma estratégia que o próprio implementou ou uma estratégia que tenha dificuldades em explicar. Portanto o aluno demonstrou algum critério nas escolhas, ainda que esse critério não seja muitas vezes analisado de forma pormenorizada pelo aluno. No entender do aluno, a eficiência de uma estratégia está relacionada com o tempo, o volume de trabalho que esta exige e o conhecimento dos conteúdos necessários para a sua implementação.

4.2. O caso de Maria

4.2.1. Caracterização

Maria, de 14 anos, é uma aluna que durante o ano letivo apresentou um nível de aproveitamento médio/baixo. Mediante observações regulares, foi possível constatar que a aluna é interessada, trabalhadora e em geral comporta-se bem nas aulas. Revelou ao longo das aulas algumas dúvidas, tendo solicitado sempre que necessário uma ajuda da colega de mesa, da professora titular e dos professores estagiários para o esclarecimento das mesmas. Quanto aos trabalhos individuais enviados para casa, realizou em média 58% dos que foram solicitados, pelo que registou alguma falta de prática constante no que respeita aos trabalhos individuais e que de alguma forma influenciaram a sua progressão e uma possível melhoria de resultados na disciplina. Foi também possível identificar algumas dificuldades no que diz respeito ao raciocínio e no tocante às justificações das decisões que toma durante a resolução de alguns exercícios. No que concerne aos resultados obtidos na disciplina, no final do 7.º ano acabou com uma classificação de nível 3, sendo que no 8.º ano baixou para nível 2. Já nos três períodos letivos do 9.º ano a aluna obteve uma classificação de nível 3. De uma forma geral a aluna enquadra-se na categoria de alunos que produzem algum trabalho em aula, realizam alguns trabalhos em casa, revelam alguma falta de prática, não dominam alguns conteúdos e apresentam resultados razoáveis nas avaliações.

Apesar das dificuldades demonstradas pela aluna de raciocínio, de assimilação dos conhecimentos adquiridos, ela empenha-se, demonstra interesse pelos conteúdos programáticos tirando dúvidas, o que corresponde as suas classificações tanto de finais de período, bem como a classificação de 50% obtida no exame nacional de Matemática e ao facto de nunca ter reprovado.

4.2.2. Tarefas

Questão 1

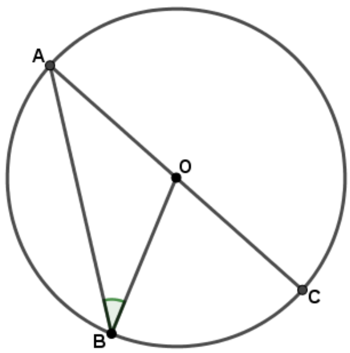
Na figura está representada uma circunferência de centro O.

Sabe-se que:

- Os pontos A, B e C pertencem à circunferência;
- [AC] é um diâmetro da circunferência;
- O arco ACB tem amplitude $250°$.

A figura não está desenhada à escala.

Determina a amplitude, em graus, do ângulo OBA.



A aluna iniciou a sua primeira tentativa de resolução (Figura 4.11) sem qualquer interferência do investigador de modo a perceber qual seria a sua primeira estratégia. Após efetuar alguns cálculos teve algumas dificuldades em avançar e o investigador tentou perceber qual foi o seu pensamento inicial.

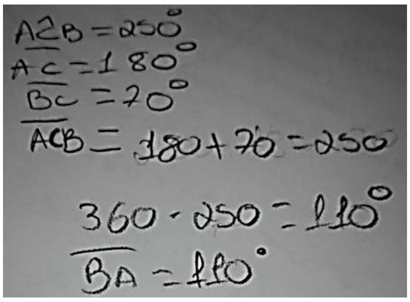


Figura 4.11 – Primeira tentativa de resolução de Maria à questão 1.

I – Explica o que começaste por fazer?
M – Eles dizem que ACB é 250. Eu sei que este aqui [arco AC] é 180. Então fiz 250 menos 180 para descobrir este aqui [arco BC]. Depois fiz 180 mais 70 para descobrir este aqui [arco ACB]. Depois fiz 360 que é tudo menos 250 dá este aqui [arco BA] que é 110.

De acordo com a resolução e a explicação inicial da aluna podemos observar que iniciou a sua resolução, começando por determinar a amplitude do arco BA e efetuando alguns cálculos desnecessários, pois determinou o arco ACB quando já sabia a sua amplitude. Ao encontrar a amplitude do arco que pretendia, sentiu algumas dificuldades em avançar, o que poderá mostrar que determinou a amplitude do arco sem efetivamente saber se isso poderia ajudar ou não na sua resolução.

I – E depois?
M – Pois, agora estava a tentar descobrir qual arco estava associado a este aqui [ângulo OBA].
I – E então?
M – Este ângulo está inscrito para que arco? O ângulo B, não estou a perceber.
I – Não está ali o arco?
M – Não.
I – Tu estás à procura do arco?
M – Sim, o arco em que ele está inscrito.
I – Então pensaste logo, como tem vértice na circunferência é um ângulo inscrito?
M – Sim.

Ao pensar que o ângulo OBA era inscrito, a ideia da aluna consistiu em procurar o arco associado ao mesmo ângulo tal como sempre fez nas aulas de Matemática. Quando percebeu que na figura não havia um arco correspondente ao ângulo inscrito revelou dificuldades em prosseguir com o seu raciocínio. Mesmo o investigador tendo dado algumas pistas não conseguiu avançar, porque certamente poderia estar a considerar que não podia mexer na figura, ou seja, que não podia prolongar o outro lado do ângulo de modo a que esta pudesse intersetar a circunferência o que permitiria identificar o arco associado ao ângulo. Foi necessário dizer à aluna o que ela deveria fazer para encontrar o arco de que estava à procura.

No diálogo que a seguir se apresenta, Maria reconhece que sentiu dificuldades porque estava à procura do arco e o mesmo não estava na figura e justifica o seu procedimento como sendo o que ela sempre faz quando pretende determinar a medida da amplitude de um ângulo inscrito.

> I – Mas como não vês o arco, o que pretendes fazer? (…) Não tens nenhuma ideia?
> M – Não.
> I – Um dos lados do ângulo contém a corda [BA] e o outro lado também deve conter uma corda certo?
> M – Sim.
> I – Então o que tu podes fazer?
> M – Não sei, explica lá.
> I – Tens de prolongar alguma coisa.
> M – Já prolonguei, e agora?
> I – Se já sabes o arco BA como descobres a amplitude do arco que estavas à procura?
> M – Ah! Ok. É 180 menos 110, que dá 70. O ângulo é 35.
> I – Porque é que tiveste alguma dificuldade em chegar ao ângulo? O que faltou?
> M – Porque estava a pensar em que arco é que ele estava escrito.
> I – Então quer dizer que quando queres saber um ângulo inscrito a primeira coisa que tu pensas é?
> M – Em saber em que arco é que ele está inscrito. Eu sempre faço assim.

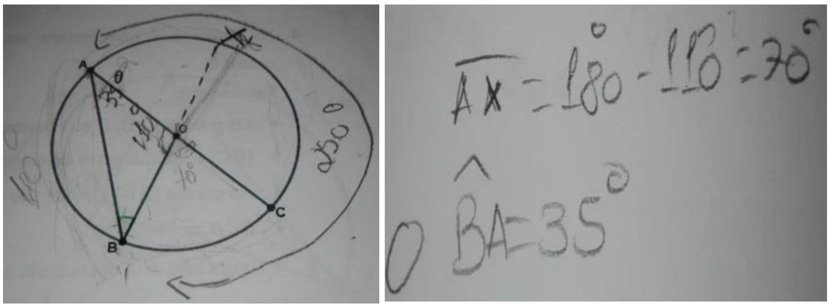


Figura 4.12 – Segunda tentativa de resolução de Maria à questão 1.

Após ter encontrado a amplitude do ângulo (Figura 4.12), a aluna não conseguiu perceber que afinal havia uma outra alternativa diferente daquela em que tinha pensado inicialmente. O foco de Maria em encontrar o arco associado ao ângulo, limitou a sua capacidade em procurar por um processo diferente, mas que conduzisse ao mesmo resultado. Embora tenha sido usada a estratégia dos ângulos internos do triângulo em alguns exercícios na aula, para a aluna é mais natural procurar a aplicação imediata da propriedade que relaciona o ângulo inscrito com o arco correspondente. No diálogo seguinte é percetível a dificuldade de Maria em explorar novas formas de resolução.

> I – Existirá um processo mais simples?
> M – Não sei.
> I – Consegues relacionar o arco BC com algum ângulo?
> M – Com este aqui. Com o ângulo ao centro [ângulo BOC] que é 70 também.
> I – E depois?
> M – Não consigo avançar.
> I – Chegaste a perceber que na figura tens um triângulo?

M – Sim.
I – Já descobriste a medida da amplitude do ângulo BOC, isso não te ajuda?
M – Ajuda a descobrir o ângulo BAC que é metade, 35. E o ângulo AOB que é 180 menos o BOC. Como no triângulo tem de dar 180 descobrimos o OBA.
I – Consegues chegar à amplitude do ângulo OBA sem ir pela soma dos ângulos internos?
M – Não sei.
I – Qual é a relação entre as amplitudes dos ângulos OAB e OBA?
M – São iguais.
I – Porque é que são iguais?
M – Não sei porquê, mas eu sei que eles são iguais.
I – Os segmentos [OA] e [OB] têm o mesmo comprimento ou não?
M – Sim, porque são raios da circunferência.
I – Se são raios da mesma circunferência, como classificas o triângulo [OAB]?
M – Isósceles.
I – Como é isósceles lados iguais correspondem?
M – Ângulos iguais.
I – Então basta sabermos o ângulo OAB para saber o OBA porque são iguais.
M – Ah.

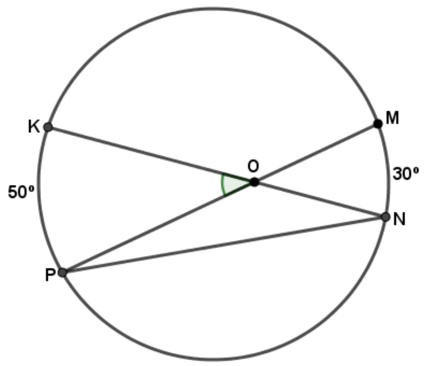
Outra dificuldade revelada pela aluna é o facto de considerar que é suficiente saber relacionar ângulo inscrito - arco correspondente e ângulo ao centro - arco correspondente para chegar ao resultado pretendido. Quando o raciocínio envolve outros conteúdos que não domina a preferência da aluna é fazer o que sempre faz porque considera mais seguro.

Maria reconhece que poderia ter pensado noutra alternativa e salienta que obter o ângulo pela soma dos ângulos internos é o processo mais fácil do que a sua ideia inicial por ser mais rápido fazer e dava menos trabalho. No entanto, a escolha da aluna prende-se mais com o facto de ter sentido dificuldades em encontrar outra estratégia de resolução do que com a própria estratégia, pois tal como afirma se o arco fosse visível teria escolhido o primeiro processo.

I – E agora percebeste que podias chegar ao ângulo sem saber o arco.
M – Sim, doutra forma. Poderia ter pensado nisso, mas era mais seguro para mim fazer o que fiz.
I – Qual dos processos consideras mais fácil? O que tu estavas a pensar primeiro?
M – Não. Acho mais fácil ir pelo triângulo, mas não pensei nisso. O que estava a fazer dava mais trabalho e não conseguia fazer sem ajuda.
I – Mas se fosse visível o arco, terias escolhido o segundo processo?
M – Não, teria escolhido, o que estava a tentar fazer primeiro.

É importante salientar que a terceira estratégia era a que envolvia menos passos e menos tempo de realização e no entanto não foi a estratégia que utilizou e optou por algo que lhe é mais familiar e que foi trabalhado mais recentemente e que por isso talvez compreenda melhor.

Questão 2



Na figura está representada uma circunferência.

Sabe-se que:

- Os pontos K, M, N e P pertencem à circunferência;
- O ponto O é o ponto de interseção das cordas [KN] e [MP];
- O arco KP tem amplitude 50°;
- O arco MN tem amplitude 30°.

A figura não está desenhada à escala.

Determina a amplitude, em graus, do ângulo KOP.

A aluna começou por iniciar a sua resolução tal como consta na Figura 4.13. O investigador não interrompeu e permitiu que ela continuasse a pensar noutra ideia. No final da segunda tentativa de resolução o investigador tentou perceber porque é que desistiu da ideia inicial.

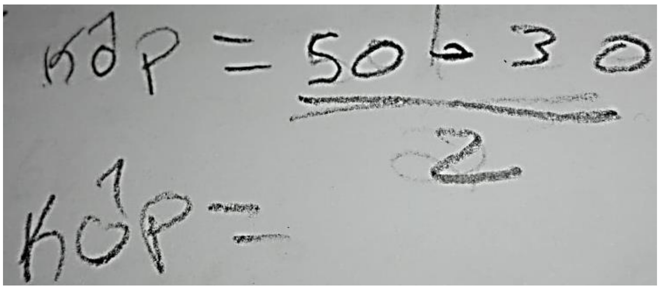


Figura 4.13 – Primeira tentativa de resolução de Maria à questão 2.

I – Porque é que desististe da tua ideia inicial?
M – Como tinha a medida daqueles dois arcos [KP e MN] pensei que era subtrair e dividir por dois porque é um ângulo excêntrico. Mas depois vi que não era assim.
I – Sim, mas porque é que estavas a pensar que não era assim?
M – Estava muito fácil. Estas coisas em Matemática não são assim.
I – Então achaste que estava a ser demasiado fácil?
M – Sim, demasiado fácil para ser verdade. Então não podia ser assim.
I – Como tu disseste aquele ângulo é excêntrico e tem vértice no interior. O outro ângulo excêntrico que tu conheces…
M – Ai e nem era menos, era mais.
I – Pois. E quando o vértice está no interior e não no centro, não é somar e dividir por dois?
M – Sim. Porque é que não me deixou fazer, era só me dizer que era mais.
I – Mas o teu problema não é porque era mais em vez de menos, era porque estava a ser demasiado fácil para ti, apesar de estar a confundir aquele ângulo [KOP] com o ângulo de vértice no exterior da circunferência.
M – Sim, claro. Também estou sempre a confundir fora com o dentro, quando é que é menos e mais.

Apesar de ter desistido da sua ideia inicial, reconheceu que o ângulo KOP era excêntrico e por isso tinha de implementar as propriedades dos ângulos excêntricos. Assim sendo, mais uma vez a aluna optou por um procedimento familiar, ou seja, obter o ângulo da forma habitual.

Segundo as justificações da aluna patente no diálogo anterior, desistiu da sua ideia inicial porque considerou que seria demasiado fácil aquela resolução. Por outro lado, apesar de a aluna estar a pensar bem, confundiu um ângulo excêntrico de vértice no interior com um ângulo excêntrico de vértice no exterior da circunferência, revelando que tem dificuldades em distingui-los. No entanto, desta vez decidiu procurar uma nova forma de resolução, algo que não tinha acontecido na questão anterior.

> M – Como é que eu descubro este arco aqui [arco KM].
> I – Mas porque é que estás à procura do arco KM?
> M – Porque eu preciso deste arco para fazer isto por ângulo excêntrico.
> I – Para fazer pelo ângulo excêntrico?
> M – Este aqui [ângulo KOM] é um ângulo excêntrico.
> I – Mas tu já não descobriste aquele ângulo excêntrico? Ou não tinhas percebido isso?
> M – Não.
> I – Mas o ângulo PON não é igual ao ângulo KOM?
> M – Ah, pois é!
> I – E depois?
> M – Então é 140 mais 140 que é 280. Depois 360 menos 280 e dividir por 2 porque o ângulo KOP é igual ao MON. A resposta é 40.

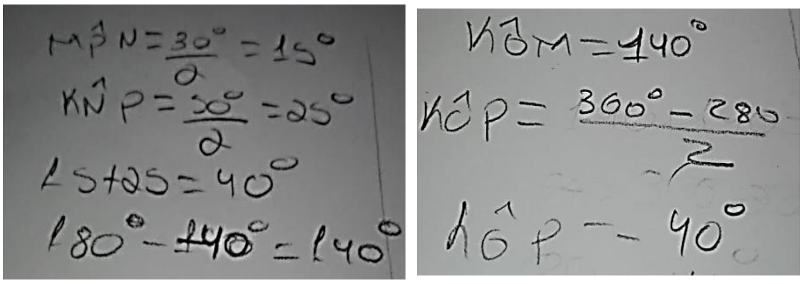


Figura 4.14 – Segunda tentativa de resolução de Maria à questão 2.

O segundo processo de resolução da aluna (Figura 4.14) consistiu em focar no triângulo [PON], justificando que este ajudaria a encontrar a amplitude dos ângulos. O investigador pensou que ao determinar a amplitude do ângulo PON chegaria de imediato ao KOP, mas não foi isso que a aluna tinha em mente. Maria tenta descobrir em seguida o ângulo KOM e, mesmo tendo descoberto a sua amplitude, não se apercebeu disso, pois não reconheceu o facto de este ser verticalmente oposto ao PON. Percebe-se também que não desistiu completamente da ideia do ângulo excêntrico e estava à procura de uma forma de implementar a sua propriedade. Outro aspeto relevante é o caso de Maria não ter percebido que os ângulos PON e KOP somam 180 e, apesar de estar a pensar bem, optou por um procedimento mais demorado devido à falta de atenção.

> I – Então, depois de ter desistido da ideia inicial foste tentar outra coisa, ou seja, focar naquele triângulo.
> M – Sim, com o triângulo conseguia saber os ângulos.

I – Não percebi porque é que deste tantas voltas até chegar ao ângulo e não tentaste explorar a relação existente entre os ângulos PON e KOP.
M – Ah, eles são suplementares, então era só fazer 180 menos 140! Estive a fazer à pressa e não prestei atenção na figura.
I – Qual das resoluções te parece mais fácil.
M – 50 mais 30 a dividir por 2. É muito mais direta. A que eu consegui fazer é mais trabalhoso.

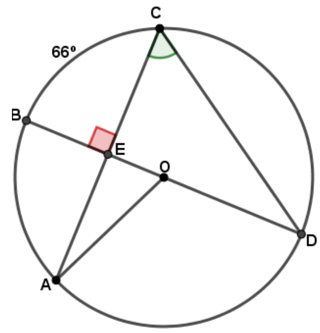
No que se refere à justificação para a escolha entre os dois processos de resolução, a aluna considera mais direta e mais fácil aplicar de imediato a propriedade dos ângulos excêntricos e por achar que envolve menos cálculos.

Questão 3

Na figura está representada uma circunferência de centro O.

Sabe-se que:

- Os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência;
- [BD] é um diâmetro da circunferência;
- A reta BD é perpendicular à corda [AC] no seu ponto médio;
- O ponto E é o ponto de interseção das cordas [BD] e [AC];
- O arco BC tem amplitude 66°.



A figura não está desenhada à escala.

Determina a amplitude, em graus, do ângulo ACD.

A aluna iniciou a sua resolução começando por tirar todas as informações possíveis contidas na figura, escrevendo as amplitudes dos arcos e dos ângulos (Figura 4.15). No diálogo seguinte, percebe-se que Maria considera que o aspeto visual é suficiente para justificar que os arcos AB e BC têm a mesma amplitude. No entanto, ficou confusa mediante algumas interrogações do investigador e manifestou dificuldades em justificar o seu procedimento.

I – Começaste por escrever que a amplitude do arco AB é 66. Porquê?
M – Porque é igual a este [arco BC].
I – Mas, porquê? Olhaste para a figura e deduziste que é igual?
M – Ai, não, é maior, ne?
I – Não sei. O que é que tu achas?
M – Agora está a confundir-me.
I – Não é para te confundir. Quero perceber porque é que assumiste que os arcos têm a mesma amplitude?
M – Basta olhar para a figura e vemos que ele é igual.
I – Essa é a tua justificação? Não tens nenhuma informação no enunciado que te permite tirar essa conclusão?
M – Não sei. Qual?
I – O facto da reta BD ser perpendicular à corda [AC] no seu ponto médio não te diz nada?
M – É por isso que os arcos são iguais?
I – É uma das propriedades que vimos na aula.
M – Não me lembrava disso.

Enquanto a aluna recolhia informações na figura, determinou a amplitude do ângulo AOB, afirmando que esta não ajudaria a descobrir a amplitude do ângulo pretendido. Mas também não explorou se o ângulo poderia ou não ajudar noutro procedimento. Em seguida pensou em determinar o ângulo CAO que é uma situação parecida com a questão 1, pois teve de prolongar o lado do ângulo para tentar encontrar o arco associado. Quando percebeu que já tinha informações suficientes para determinar o ângulo, começou imediatamente por apresentar a sua resolução (Figura 4.15).

M – Mas isso também não vai ajudar em nada.
I – O que é que não ajuda?
M – O ângulo AOB.
I – Não sei se é porque não ajuda ou porque não percebeste que poderá ajudar.
M – O ângulo EAO está para este arco [prolongou o segmento [AO] e apontou para o arco]?
I – Isso ajuda-te?
M – Ajuda a descobrir quanto é que ele é.
I – Sim, mas ajuda-te a descobrir o ângulo que nós queremos? Vê lá se não estás a complicar.
M – Ah, meu Deus! Sinceramente!

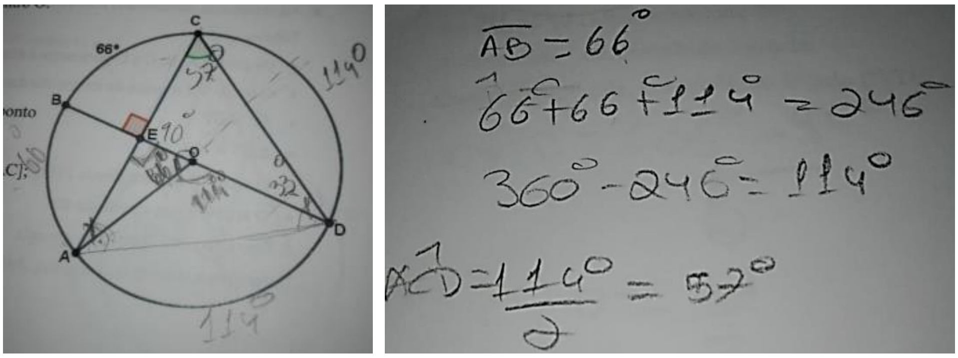


Figura 4.15 – Resolução de Maria à questão 3.

Após a resolução, a aluna foi questionada sobre a existência de outras possibilidades para chegar à resposta e a razão pela qual escolheu usar a estratégia inicial em vez de outra. A justificação para a escolha da estratégia inicial assenta no facto de estar habituada a fazer sempre o mesmo, ou seja, se pretende saber a amplitude do ângulo inscrito procura primeiro pelo arco correspondente. É de notar que pelo facto de não ter percebido de imediato que a amplitude do ângulo CED é 90 graus e que podia implementar a estratégia da soma dos seus ângulos internos do triângulo [CDE], este não foi o motivo pelo qual optou pelo procedimento inicial como se pode ver no diálogo seguinte.

I – Há outra forma de chegar ao ângulo ACD?
M – Eu… com o triângulo.... Há, sim. 90 mais 33 é igual a 123. Depois 180 – 123 dá 57. Ya! Há outra forma! Eu não estava a ver que isso era um triângulo retângulo.
I – Então foi por isso que inicialmente não foste por aí?
M – É aquela cena, como é um ângulo inscrito vou descobrir o arco. Já estou habituada a fazer assim.

Durante a implementação da estratégia inicial a aluna chegou a determinar a amplitude do ângulo AOB, mas havia entendido que era desnecessária e manteve a sua opinião. Foi percetível a dificuldade de Maria em explorar aquele procedimento por estar convencida que era inútil. Por outro lado, revelou também dificuldades em relacionar a amplitude de um ângulo ao centro com a amplitude do ângulo inscrito com o mesmo arco, aspetos que influenciaram esta abordagem.

> I – Pois é. Há pouco disseste que o ângulo AOB não ajuda em nada.
> M – E não ajuda.
> I – Mas se tu sabes o ângulo AOB o que sabes acerca do ângulo AOD?
> M – A soma dos dois dá 180. Mas continua a não ajudar.
> I – Então qual é a amplitude do ângulo AOD?
> M – 180 - 66 que é 114.
> I – Sabendo o ângulo AOD não consegues descobrir o ACD?
> M – Não sei como.
> I – O AOD disseste que é ao centro e o que nós queremos é inscrito, certo?
> M – Sim.
> I – Qual é a relação entre um ângulo inscrito e um ângulo ao centro?
> M – Não sei a relação.
> I – Então qual é a relação entre o ângulo AOD e o arco AD.
> M – É igual.
> I – E como obténs o ACD a partir do arco AD?
> M – Faço metade.
> I – Então, como obténs o ângulo ACD a partir do ângulo AOD?
> M – É metade também.

Após explorarmos a terceira estratégia de resolução, Maria não consegue apresentar por si só duas novas estratégias que permitem calcular a amplitude do arco AD porque a ação alternativa simplesmente não era vista pela aluna. Quando foi dada uma pista pelo investigador, avançou imediatamente sem qualquer dificuldade, como se percebe no diálogo seguinte.

> I – E acabaram-se as hipóteses todas?
> M – Não sei. Pode ser que haja mais alguma, mas não consigo ver.
> I – Como podes obter o arco AD sem ser pelo processo que fizeste anteriormente?
> M – Ah! Como o arco AB é 66, podíamos ter feito 180 – 66 e tínhamos logo o arco AD e o ângulo ACD.
> I – Haverá uma outra hipótese de chegar ao arco AD?
> M – Não, já acabamos com todas as hipóteses.
> I – Que tipo de ângulo é o CEB?
> M – É excêntrico.
> I – Então, se é excêntrico como descobres o arco AD?
> M – Ah sei que 90 = (66+x)/2, daí descobrimos o x resolvendo a equação depois obtemos o ângulo ACD.
> I – Ah! Pois, e não tinhas pensado nisso.

À medida que surgem novas formas de resolução, a capacidade da aluna em explorar uma nova diminui substancialmente. Maria afirma com toda a convicção de que não há mais nenhuma hipótese de resolução. Para uma nova abordagem foi pedida à aluna que arranjasse um triângulo que não está completamente visível na figura. Embora já tenha feito algo semelhante nas questões anteriores, ainda sente algum receio em modificar a figura, pois não considera que seja uma ação segura. Pode-se constatar que uma vez mais o conhecimento dos conteúdos é um dos principais entraves da aluna na exploração de outros processos de resolução. Quando a estratégia envolve outros conteúdos que não sejam as propriedades dos ângulos ao centro e dos ângulos excêntricos revela mais dificuldades.

I – Será que não há mais nenhuma forma?
M – Não esteja a inventar. Já acabou.
I – E se pensares num outro triângulo sem ser o que nós já usamos?
M – Está ali também o triângulo [AOE] mas isso não ajuda em nada e não está na figura mais nenhum triângulo a não ser esses dois.
I – E não consegues arranjar?
M – Posso fazer isso?
I – Não podes porquê? Desde que esteja tudo bem.
M – Então, podemos traçar o lado [AD]. Descobrimos os ângulos ADC e CAD e já está.
I – Isso mesmo! E será que existe uma outra alternativa?
M – Acho que não!
I – Se pensarmos no triângulo [CDE], como se designa o ângulo AED relativamente ao triângulo?
M – Já me esqueci como é que chama.
I – Os ângulos EDC e ECD são internos, certo?
M – Então o AED é externo.
I – Não te recordas de nenhuma propriedade sobre os ângulos externos de um triângulo?
M – Já me esqueci destas propriedades.
I – Pois, a amplitude do ângulo externo é a soma das amplitudes dos dois ângulos internos não adjacentes.

No que respeita à escolha entre os diversos processos de resolução a aluna considerou que a sua estratégia é a mais adequada porque é o que sabe fazer bem apesar de não saber justificar.

I – Das hipóteses que já vimos, o que te parece mais fácil?
M – É o que fiz.
I – Porquê?
M – É o que eu sei fazer bem.
I – Como sabes fazer bem se não estavas a conseguir justificar?
M – Eu não sei justificar, mas sei fazer.
I – Mas havia outras estratégias com menos passos e que demoram menos tempo.
M – Sim, mas pelo menos estou a jogar pelo seguro.

O critério de escolha da aluna baseou-se no que conseguiu fazer independentemente de esta envolver mais passos de resolução ou demorar mais tempo a concretizá-la. Neste sentido a eficiência da sua estratégia assenta no que ela confia ou valoriza mais.

Questão 4

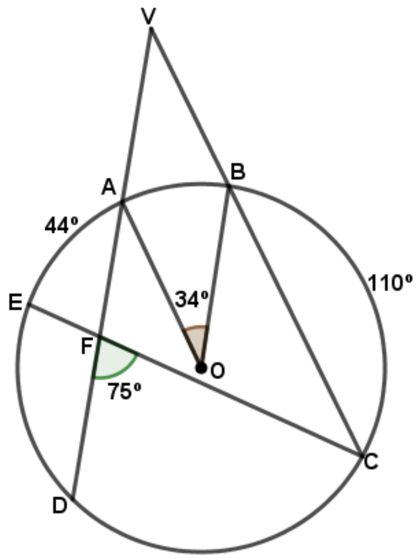
Na figura está representada uma circunferência de centro O.

Sabe-se que:

- os pontos A, B, C, D e E pertencem à circunferência;
- as cordas [AD] e [BC] têm o mesmo comprimento;
- F é o ponto de interseção das cordas [EC] e [AD];
- V é o ponto de interseção das retas AD e BC;
- o arco EA tem amplitude 44º;
- o arco BC tem amplitude 110º;
- o ângulo AOB tem amplitude 34º;
- o ângulo CFD tem amplitude 75º.

A figura não está desenhada à escala.

Qual é a amplitude, em graus, do ângulo CVD?



Antes de iniciar a resolução (Figura 4.16) a aluna afirmou que não era preciso ler o enunciado porque todas as informações de que precisava estavam contidas na figura. A sua atitude dificultou a tomada de algumas decisões, precisamente porque havia no enunciado informações que não seria possível recolher apenas por visualização da figura e concordou que é sempre importante ler o enunciado e observar a figura em simultâneo. Curiosamente essas informações eram o que precisava para tirar algumas dúvidas e, após o esclarecimento das mesmas, pareceu-lhe tudo mais fácil.

No diálogo seguinte percebe-se que Maria começou por tentar identificar quais os arcos que necessitava para determinar a amplitude do ângulo. A quantidade de informação de que dispunha na figura não permitiu que ela visualizasse de imediato um dos arcos compreendidos entre os lados do ângulo.

M – Eu não vou ler porque não é preciso.
I – Não é preciso?
M – Não, porque tudo o que está ali está na figura.
I – Então, continua.
M – É este arco [arco CD] mais qual?
I – Qual é o outro arco que está entre os lados do ângulo?
M – Ah, é este aqui [arco AB]. Este aqui [ângulo AOB] é um ângulo ao centro?
I – O que é que tu achas?
M – É sim. Então o arco AB é 34. [pensou um bocado]
I – Não é melhor ler o enunciado? Podem existir informações que não estão na figura.
M – Ah! O arco AD também é 110º porque [AD] e [BC] têm o mesmo comprimento. Agora tá fácil

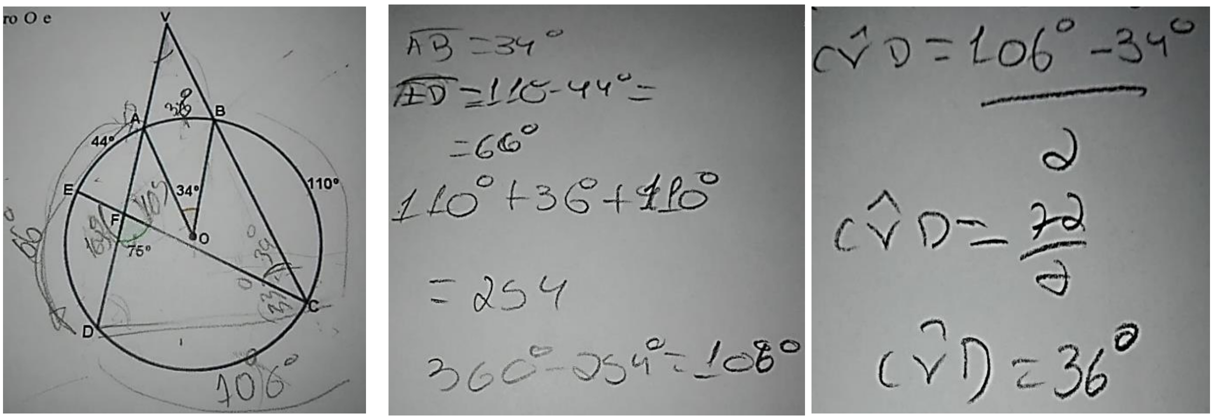


Figura 4.16 – Resolução de Maria à questão 4.

Uma vez mais após ter percebido que o ângulo era excêntrico a sua primeira estratégia consistiu em procurar os arcos compreendidos entre os lados do ângulo e posteriormente fazer a semidiferença entre as suas amplitudes. A aluna mesmo tendo algumas dificuldades em avançar e de ter percebido pelas questões anteriores que poderá haver sempre outras formas que conduzem ao mesmo resultado, não desistiu da sua ideia. De acordo com o que consta no diálogo seguinte, o investigador tentou perceber a razão pela qual escolheu aquele procedimento em vez de outro e como justifica essa escolha.

Maria defende que a estratégia lhe pareceu mais óbvia, ou seja, entende-se que foi o que ela conseguiu ver logo e que lhe pareceu mais fácil de implementar. Mas não só, no seu procedimento também está subjacente a leitura que ela faz quando pretende saber a amplitude de um ângulo excêntrico, ou seja, primeiro vai à procura dos arcos.

> I – Porque é que estavas a ter dificuldades em descobrir o arco DC?
> M – Porque não li o enunciado.
> I – Pois, a tua primeira ideia foi aplicar as propriedades do ângulo excêntrico?
> M – Sim, por isso fui primeiro à procura do arco DC que era o que faltava.
> I – Muito bem. Mas porque implementaste esta estratégia em vez de outra?
> M – Porque esta aqui é mais óbvia e não consigo encontrar tipo. Ah! Aqui se quisermos, temos um triângulo.

Segundo a resposta da aluna, inicialmente não estava a encontrar outra resolução possível, mas após pensar por alguns instantes, decidiu ir à procura de uma estratégia que envolvesse um triângulo. Maria começou então por traçar o lado DC semelhante ao que foi feito na questão anterior. Ainda que com alguma precipitação na leitura dos ângulos, conseguiu chegar ao resultado, justificando sem grandes dificuldades o seu procedimento.

> I – De que triângulo estás a falar?
> M – Se traçarmos o DC temos o triângulo CDV
> I – Será que é uma boa ideia?
> M – É a única forma que nós temos de ir pelo triângulo.
> I – Vê lá se aquele triângulo te ajuda.
> M – Ok, eu sei que este aqui [ângulo DCE] é 33 graus que é metade do arco ED
> I – Ok, e este aqui [ângulo ECB]?

M – É 180 menos o DCE.
I – Estás a dizer que eles são suplementares?
M – Ai, não. Então o ECB podemos obter através do arco EB. E depois o CDA através do arco AC. Com os dois ângulos [DCB e CDA] obtemos o ângulo CVD.

Um aspeto relevante identificado no diálogo anterior é o facto da aluna afirmar que o triângulo CDV era o único que lhe permitia chegar à resposta. Percebe-se que não estava a considerar o triângulo [CFV] como uma possível hipótese, porque não faria qualquer sentido. Maria estava convicta de que o segmento [CE] era um diâmetro e entendeu que o ângulo de vértice em F era um ângulo interno do triângulo OAF e que este não ajudava para obter o ângulo pretendido.

I – Não existirá uma forma mais fácil de chegar ao resultado usando um outro triângulo?
M – Qual? Este aqui [triângulo CVF]? Não faz sentido nenhum.
I – Não faz sentido porquê? Não é um triângulo?
M – Mas este vértice aqui [ponto F] é deste triângulo [apontou para o suposto triângulo [OAF]].
I – Estás a considerar que o [CE] passa pelo centro?
M – Passa. E aquele triângulo não ajuda em nada.
I – Mas o ponto F não é também um vértice do triângulo [CVF]?
M – Ah, pois é!
I – Qual foi a dúvida?
M – Estava a olhar só para o interior da circunferência e não reparei bem.
I – Os ângulos FCB e CFV quais são as suas amplitudes?
M – O FCB é 39. E o ângulo CFV está para este arco [arco AC].
I – Estás a dizer que o ângulo CFV é ao centro?
M – Não, que estúpida!
I – Então qual é a sua amplitude? [no meio de tanta informação a aluna não conseguia avançar]. Então o ângulo DFC não é 75?
M – Ah! É 180-75, porque são suplementares e dá 105. Depois 180 - 105 - 39 dá o ângulo CVD.

Quando solicitada a explorar outras hipóteses, Maria revelou dificuldades em prosseguir, afirmando que não conseguia ver. Mesmo tendo explorado algumas estratégias nas questões anteriores, como por exemplo, a aplicação das propriedades de um ângulo externo de um triângulo, a aluna já não consegue implementar a mesma propriedade na questão seguinte porque não se recorda.

I – Podemos tentar ver outra hipótese?
M – Não vejo outra.
I – Tínhamos visto uma propriedade há pouco que tu já esqueceste. Considerando ainda o triângulo CFV, que tipo de ângulo é o CFD?
M – É externo, então é a soma destes internos aqui. O CVD é 75-39.
I – Porque não pensaste nisso? Já tínhamos feito isso na questão anterior.
M – Nunca me lembro desta propriedade.

Uma das estratégias que a aluna não chegou a explorar consistia em determinar a amplitude do arco CD por um processo diferente daquele em que implementou na sua primeira ideia. Quando questionada porque não havia determinado a amplitude do arco CD através da aplicação da propriedade do ângulo excêntrico, responde que foi o que ela viu e por isso imediatamente a realizou.

I – És capaz de explorar outra situação?
M – Não sei, não consigo, está difícil.
I – Haverá um processo diferente para obter o arco CD?
M – Não sei.
I – Que tipo de ângulo é o CFD?
M – É excêntrico. Então 75 = $(x+44)$ /2 e dá o DC.
I – Queria entender porque não tinhas determinado o arco DC desta forma.
M – Porque foi o que consegui ver logo e então não pensei noutra forma.

No que concerne à escolha do processo mais adequado para esta questão, a aluna escolhe a sua resolução como a mais apropriada porque conseguiu fazer, ainda que reconhecesse que seja mais demorado. Do ponto de vista de Maria, o processo mais adequado é o que fez e se conseguiu resolver a questão é porque entendeu melhor e se foi ensinado assim tem mais peso quanto à sua eficiência.

Durante a exploração de outras formas de solucionar uma questão a aluna refere que as dificuldades que sentiu foram causadas pela insegurança ou algumas incertezas de que um determinado procedimento seja válido para uma determinada questão.

I – Qual dos processos consideras mais adequado para esta questão?
M – O que eu fiz.
I – Porquê?
M – É mais fácil. Não é mais rápido, mas para mim é mais fácil.
I – Para ti o mais fácil é o quê?
M – É o que eu fui capaz de fazer porque entendi melhor aquilo e porque é a forma como sempre fiz.
I – Por que razão tu bloqueias quando tentas explorar novas formas de fazer?
M – Porque não tenho a certeza se posso fazer assim.

No final da experiência, Maria foi questionada sobre as dificuldades que revelou no uso de múltiplas estratégias e qual a importância que atribui à aprendizagem e uso de múltiplas estratégias. Maria considera que o hábito de resolver os exercícios sempre da mesma forma e o conhecimento dos conteúdos influenciaram pela negativa a sua abordagem ao tentar explorar novos processos de resolução.

I – O que influenciou a tua abordagem na exploração de diversos processos de resolução?
M – Já estava habituada à forma que sempre faço nas aulas.
I – Mais alguma coisa influenciou?
M – Fiquei atrapalhada com algumas propriedades.

Na opinião de Maria a experiência teve uma influência positiva no desenvolvimento da sua capacidade ou perceção no que se refere à exploração de diversos processos de resolução. Relativamente à aprendizagem e uso de múltiplas estratégias, Maria considera que é importante, pois permite evitar alguns obstáculos na resolução de exercícios.

I – O que aprendeste com esta experiência?
M – Aprendi que existem várias formas de resolver o exercício. Não resolvi só da maneira que estava acostumada a fazer.
I – Para ti qual a importância de aprender a resolver um exercício de várias formas?
M – É uma vantagem porque, às vezes, quando ficamos presos num caminho, podemos pensar noutra forma e conseguir resolver.

4.2.3. Análise final

Fatores que influenciaram o processo de resolução

Nas questões realizadas, ainda que a sua estratégia inicial esteja correta, apresentou algumas dificuldades em concretizá-la. A resolução de Maria foi influenciada pelo facto da aluna, confundir algumas noções, não ler o enunciado, considerar que as informações que detém são insuficientes para responder a algumas questões, não recordar de algumas propriedades vistas em aula e também relacionadas com a quantidade de informações que de certa forma atrapalharam o raciocínio da aluna.

Escolhas feitas e justificação

Maria revelou algumas dificuldades em explicar algumas decisões adotadas durante o seu procedimento, apesar de considerar que sabe fazer. Por isso entende que o mais importante é saber fazer e não justificar de forma conveniente aquilo que faz.

É importante ressaltar que a primeira estratégia implementada pela aluna é sempre aquilo que está mais habituada a fazer e que sente mais segura por fazê-la, independentemente de esta envolver mais etapas de resolução, mais conteúdos que tem de saber ou demore mais tempo a ser concluída. Além disso justifica a sua escolha como sendo a primeira que viu no momento e por isso procedeu imediatamente à resolução, sem pensar noutra estratégia. Esta ação da aluna permite-nos entender a sua dificuldade em analisar a eficiência de um determinado procedimento antes de o implementar.

Dificuldades na exploração de diversos processos de resolução

Outra dificuldade revelada pela aluna consiste na exploração de diversos processos de resolução. Uma vez apresentada a sua primeira estratégia, Maria não consegue perceber a existência de uma segunda estratégia mesmo que esta já tenha sido utilizada em questões anteriores, a menos que haja em alguns casos uma intervenção do investigador. Por vezes consegue implementar uma segunda estratégia, mas sempre optando por um procedimento que lhe seja mais familiar.

Importa salientar que em abordagens que seja necessário recorrer a uma propriedade que não está diretamente relacionada com a amplitude dos ângulos ao centro e ângulos excêntricos e que envolvem várias etapas de resolução a aluna tende a revelar maiores dificuldades. Certamente estas dificuldades resultam em parte da insegurança que a aluna tem em abordar um conteúdo que não domina e a falta de capacidade em trabalhar com diversos conteúdos em simultâneo.

Critérios de escolha entre os diversos processos de resolução

Quanto à escolha do processo de resolução mais apropriada, geralmente Maria escolhe aquela que percebe melhor, o que conseguiu fazer e o que sempre faz nas aulas de Matemática. Portanto no entender da aluna a eficiência de uma estratégia está relacionada com o grau de confiança, mesmo que tenha dificuldades em explicar o seu procedimento, que sejam necessários mais passos e demore mais tempo na sua concretização.

4.3. O caso de Luís

4.3.1. Caracterização

Luís é um aluno que tem muitas dificuldades na disciplina, gosta de estar sossegado e intervém muito pouco na aula. É um aluno que produz algum trabalho em aula quando está sozinho, mas quando está acompanhado por algum colega, reduz significativamente o seu trabalho. Tem uma certa dificuldade em expor as suas dúvidas e teve um registo insuficiente dos trabalhos realizados em casa (36%). No que respeita a capacidade de raciocínio, apresentou algumas dificuldades devido ao conhecimento dos conteúdos e o estabelecimento de conexões. O aluno vinha do 7.º e 8.º ano com uma classificação de nível 2, revelando alguma falta de pré-requisitos, sendo um dos aspetos que influenciaram a melhoria de resultados. No 9.º ano, devido ao baixo ritmo de trabalho, a pouca dedicação e persistência nos estudos traduziu-se em resultados menos bons que obteve ao longo do ano letivo. No entanto, foi possível observar alguma melhoria relativamente aos trabalhos do aluno em aula durante o terceiro período, mesmo assim não foi possível atingir uma classificação positiva na avaliação final do período, registando nos três períodos uma classificação de nível 2. No exame nacional obteve a classificação de 43%, um resultado perto da positiva.

4.3.2. Tarefas

Questão 1

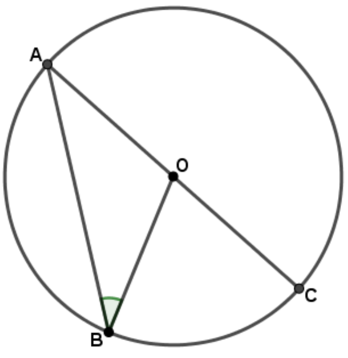
Na figura está representada uma circunferência de centro O.

Sabe-se que:

- Os pontos A, B e C pertencem à circunferência;
- [AC] é um diâmetro da circunferência;
- O arco ACB tem amplitude $250°$.

A figura não está desenhada à escala.

Determina a amplitude, em graus, do ângulo OBA.



Luís, após pensar por alguns instantes, revelou dificuldades em implementar a sua estratégia de forma eficaz. No diálogo seguinte, percebe-se que o aluno andou um pouco à deriva, pois determinou alguns arcos e ângulos sem perceber se poderia ou não ajudar. Por isso desistiu de alguns processos porque tinha dificuldades em dar o seguimento à estratégia. Foi necessário algum auxílio do investigador, uma vez que o aluno não conseguia estabelecer relações entre os arcos que determinou e os respetivos ângulos correspondentes.

I – Começaste por determinar a amplitude do arco BA. E depois?
L – Faço 180 menos o BA para dar o BC?
I – E depois?
L – Não tou a lembrar.
I – Pensa lá um pouco. Porque é que queres descobrir a amplitude do arco BC?
L – Não me lembro se calhar podia ajudar, não tou a lembrar.
I – O arco BC ajuda a descobrir alguma coisa?
L – A descobrir este ângulo [ângulo BOC].
I – Exatamente. E depois?
L – Este aqui já sei, o AOB é 110º que é igual ao arco BA.
I – Então e agora?
L – Descobrindo aquele arco [arco BC] descobre-se este ângulo [ângulo BAC] é 70 dividir por 2, que é 35.
I – Certo. Continua.
L – E agora 180 - 110 - 35, o OBA dá 35º.

Após várias tentativas, o Luís apresentou a resolução da Figura 4.17. Apesar das dificuldades reveladas pelo aluno, a estratégia consistiu em determinar a amplitude de dois ângulos internos do triângulo [OAB] e posteriormente obter a amplitude do ângulo pretendido. Quando questionado sobre a escolha da estratégia implementada, considera que a mesma é mais fácil, porque conseguiu lembrar. Ao aluno afirmar que a estratégia era "fácil" refere-se ao facto de esta ter sido a primeira que ele conseguiu implementar, independentemente das dificuldades que manifestou e da existência de outras estratégias melhores.

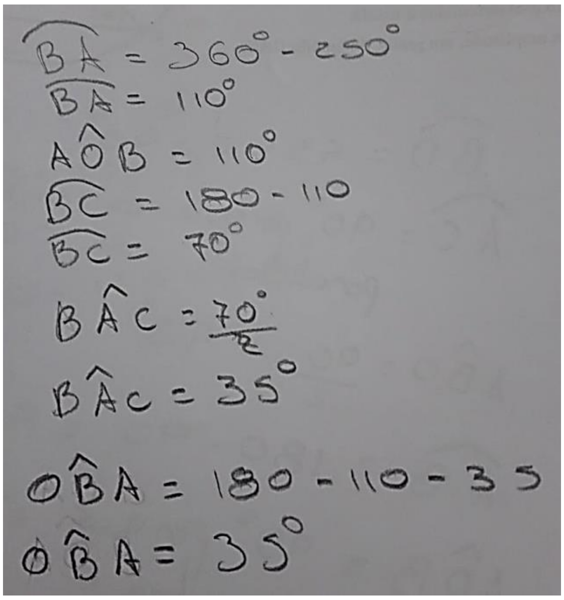


Figura 4.17 – Resolução de Luís à questão 1

I – Parece-me que começaste por determinar as amplitudes dos ângulos internos do triângulo [OAB].
L – Sim.
I – Porque não te ocorreu outra estratégia em vez desta?
L – Acho que era mais fácil.
I – Achas?
L – Pelo menos para mim do que me lembrava acho que era mais fácil.
I – Quer dizer que o mais fácil é o que tu consegues lembrar?
L – Sim.

Após implementar a sua primeira estratégia, Luís evidenciou algumas dificuldades em perceber a existência de uma segunda estratégia. De acordo com o diálogo seguinte, mediante as sugestões do investigador, o aluno reconhece que dois ângulos internos do triângulo [OAB] são iguais pelo facto dos lados [AO] e [OB] serem raios da mesma circunferência. Sendo o triângulo [OAB] isósceles poderia obter a amplitude do ângulo OBA após calcular a amplitude do ângulo AOB, efetuando menos cálculos na sua resolução anterior. Além disso permitia explorar uma segunda estratégia após determinar a amplitude do arco BC. Tal como se pode constatar, o conhecimento de algumas propriedades dificultou o raciocínio do aluno ao implementar a sua primeira estratégia e ao explorar novos processos de resolução.

I – Não existirá outra forma de resolver esta questão?
L – Não estou a ver.
I – Como classificas o triângulo [AOB]?
L – Tem dois ângulos iguais.
I – Porquê?
L – Porque tem dois lados iguais.
I – Quais são os dois lados iguais? E porque é que são iguais?
L – Este e este [os lados [AO] e [OB]]. Porque formam ângulos iguais.
I – É por isso que são iguais? O que é que eles são relativamente à circunferência?
L – Ah! São raios.
I – Exato! Como são raios da mesma circunferência são iguais e desta forma os ângulos também são, porque lados iguais correspondem ângulos iguais. Então, para descobrir a amplitude do ângulo OBA basta saber?
L – O BAC.
I – Mas, como descobrir a amplitude do ângulo BAC?
L – Podemos descobrir primeiro o arco BC.
I – Exatamente. Mas como determinas o arco BC sem determinar primeiro o AB?
L – Não estou a ver.
I – Sabes que ACB é 250, o que isso ajuda?
L – Ah! Podemos fazer 250 - 180.

Uma terceira estratégia que o aluno presumiu que poderia existir, mas que não lhe ocorreu, consistia em relacionar o arco BC com o ângulo ao centro BOC. O Luís fez essa abordagem na sua primeira estratégia, mas não conseguiu perceber que esse processo poderia conduzir a uma estratégia que também envolvia algumas etapas da estratégia anterior. O facto do ângulo BOC ser externo ao triângulo [OAB], permitia estabelecer uma relação com os ângulos internos não adjacentes.

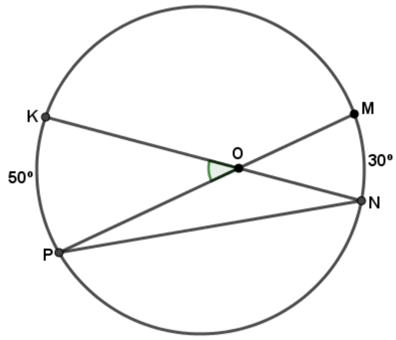
I – E agora, haverá outra forma?
L – Presumo que sim, mas não consigo ver.
I – Na tua primeira resolução tinhas determinado o BC e depois o BOC, mas abandonaste a ideia. Que tipo de ângulo é o BOC relativamente ao triângulo [OAB]?
L – É um ângulo externo.
I – Exatamente! E qual é a relação entre o ângulo externo e os internos não adjacentes?
L – Não me lembro.
I – É uma propriedade que tínhamos visto na aula. A amplitude de um ângulo externo é igual à soma das amplitudes de dois ângulos internos não adjacentes. E agora?
L – Pois. Agora como os ângulos não adjacentes são iguais é só fazer BOC a dividir por dois.

Após a terceira estratégia, parece cada vez mais difícil para o aluno conseguir encontrar uma outra hipótese de resolução. Inicialmente o investigador tinha a expectativa de que Luís fosse procurar o arco associado ao ângulo OBA, mas a afirmação do aluno permite-nos constatar que o arco associado ao ângulo era o que precisava para implementar essa estratégia e inicialmente não o fez porque o ângulo inscrito não está com a configuração que está habituado a ver. Era necessário prolongar o segmento [BO] de modo a que este intersetasse a circunferência e, em seguida, identificar o arco que corresponde ao ângulo. Esta ação apenas foi efetuada pelo aluno quando solicitado. Importa considerar a hipótese de que acrescentar algo à figura nem sempre é um processo que Luís considera seguro.

I – Será que ainda podemos fazer outra coisa?
L – Agora está mais difícil.
I – O ângulo OBA, que tipo de ângulo é?
L – Inscrito.
I – Normalmente o que se faz quando queremos descobrir a amplitude de um ângulo inscrito?
L – Encontrar o arco. Mas não vejo ali nenhum arco.
I – Então o que podes fazer?
L – Ah! Prolongar a linha.
I – Muito bem! E o que podemos fazer para descobrir o arco que arranjaste?
L – É igual ao BC. Porque os ângulos ao centro são verticalmente opostos.
I – Se tivesse o arco na figura, seria a primeira coisa que tu farias?
L – Sim.
I – Pois! Entre as estratégias que já vimos o que te parece mais adequada?
L – Esta última.
I – Porquê?
L – É o que normalmente se faz.

Em relação à escolha da estratégia mais adequada para esta tarefa, o aluno escolhe a estratégia que consiste em procurar o arco associado ao ângulo. Neste sentido, tal como refere, o seu critério está associado ao que normalmente se faz nas aulas de Matemática: determinar a amplitude de um ângulo inscrito através do arco que lhe corresponde. Neste sentido, Luís escolheu aquilo que lhe é mais familiar.

Questão 2



Na figura está representada uma circunferência.

Sabe-se que:

- Os pontos K, M, N e P pertencem à circunferência;
- O ponto O é o ponto de interseção das cordas [KN] e [MP];
- O arco KP tem amplitude 50°;
- O arco MN tem amplitude 30°.

A figura não está desenhada à escala.

Determina a amplitude, em graus, do ângulo KOP.

Após a leitura do enunciado da tarefa, Luís manifestou oralmente o seu raciocínio, dizendo que o ângulo pretendido não é ao centro e por isso não poderia aplicar diretamente a propriedade de um ângulo ao centro. Em seguida, o aluno pensou por alguns instantes, mas demonstrou dificuldades em avançar com o seu raciocínio, sobretudo por causa da consolidação de alguns conceitos, neste caso, reconhecer que o ângulo pretendido é excêntrico e cuja amplitude é obtida, efetuando a semissoma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e no prolongamento dos seus lados.

> L – Isto, como não é ao centro, não posso aplicar diretamente.
> I – Sim. Bem visto. E depois?
> L – Estou a tentar ver.
> I – Então, que tipo de ângulo é? Lembras-te de algum nome que falamos em aula?
> L – Não me lembro, senão já estava a fazer.
> I – Quando um ângulo tem vértice no interior da circunferência, mas não no centro e vértice no exterior da circunferência, como se designa?
> L – Não me lembro.
> I – Chamam-se ângulos excêntricos.
> L – Ah! Sim.
> I – Quando tem vértice dentro como se obtém? (…) Não te recordas?
> L – Não.

Importa destacar, por um lado, o foco que o aluno depositou ao tentar desprender das dificuldades durante a sua primeira estratégia e por outro, a sua falta de determinação em abandonar a estratégia e procurar por outra. Perante as dificuldades de Luís em avançar, o investigador solicitou que tentasse pensar noutra estratégia. Em seguida, Luís mostrou-se autónomo na implementação de uma segunda estratégia, como podemos observar no diálogo seguinte e na Figura 4.18, resolvendo facilmente sem necessitar de qualquer apoio.

> I – Então consegues ver outra forma de chegar ao ângulo?
> L – Este aqui não é 180 [ângulo KON]?
> I – Afirmativo.
> L – Então sabendo aquele ali [ângulo PON] descubro este aqui [ângulo KOP].
> I – Sim, mas como consegues obter a amplitude do ângulo PON?
> L – Hum. Este [ângulo MPN] eu sei vai dar 15. E este aqui é 25 [ângulo KNP].

I – E depois?
L – Depois 180 menos aqueles dois vai dar este aqui [ângulo PON].

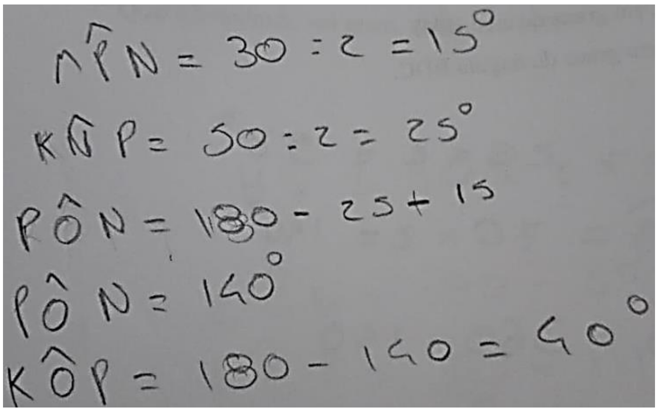


Figura 4.18 – Resolução de Luís à questão 2.

Voltando à estratégia que o aluno pensou inicialmente, quando questionado sobre o não abandono da referida estratégia, justifica que não estava a pensar noutra forma. Do nosso ponto de vista o foco na primeira estratégia limitou uma possível tomada de decisão de Luís. Além das duas estratégias havia uma terceira estratégia que envolve a propriedade de um ângulo externo, que foi também abordada na questão anterior, mas o aluno considerou que já não havia mais hipótese. Esta tem algumas similaridades com o processo efetuado pelo Luís, descartando a etapa do cálculo do ângulo PON e obtendo diretamente a amplitude do ângulo KOP através da soma dos ângulos internos não adjacentes do triângulo [PON].

I – Muito bem. Mas inicialmente, porque não pensaste noutra forma quando sentiste dificuldades?
L – Porque não estava a pensar noutra forma.
I – Relativamente à estratégia inicial, sendo um ângulo excêntrico com vértice no interior a amplitude obtém-se somando os arcos KP e MN e…?
L – Dividir por dois. Pois é, já não me lembrava.
I – Além das duas hipóteses existirá mais alguma?
L – Acho que não.
I – Considerando outra vez o triângulo [ONP], como podes obter o ângulo KOP sem obter primeiro o ângulo PON?
L – Acho que não dá.
I – Não consegues lembrar uma propriedade que vimos há pouco?
L – Não sei.
L – Que tipo de ângulo é o KOP relativamente ao triângulo [ONP]?
L – É um ângulo externo.
I – E depois?
L – Depois… tínhamos visto que era a soma destes aqui [ângulos OPN e ONP] né?
I – Isso mesmo.
L – Não tinha visto essa forma.
I – Considerando as três resoluções, qual é a melhor para ti?
L – O que estava a pensar no início.
I – Mas tiveste mais dificuldades no que pensaste inicialmente e nem sequer conseguiste fazer.
L – Sim, mas é mais direta.

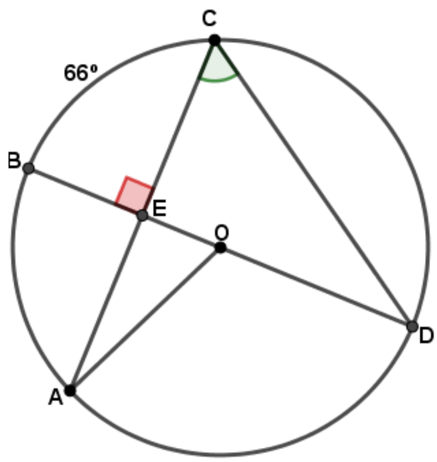
Tendo em consideração o critério de escolha para a estratégia mais adequada, parece-nos importante realçar que o aluno tem preferência por métodos mais diretos e cuja aplicação está relacionada com a propriedade do ângulo pretendido. A dificuldade que revelou aquando da tentativa de execução da estratégia inicial, não influenciou a escolha da mesma como estratégia mais adequada.

Questão 3

Na figura está representada uma circunferência de centro O.

Sabe-se que:

- Os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência;
- [BD] é um diâmetro da circunferência;
- A reta BD é perpendicular à corda [AC] no seu ponto médio;
- O ponto E é o ponto de interseção das cordas [BD] e [AC];
- O arco BC tem amplitude 66°.



A figura não está desenhada à escala.

Determina a amplitude, em graus, do ângulo ACD.

Ao ler o enunciado desta tarefa, Luís percebeu que pretendíamos saber a amplitude de um ângulo inscrito e por isso começou por procurar a amplitude do arco associado AD. Um aspeto interessante é o facto de o aluno afirmar que teria de aplicar a mesma propriedade do exercício anterior, ou seja, a propriedade de um ângulo excêntrico de vértice no interior da circunferência, considerando que as únicas informações fornecidas pelo enunciado era a amplitude do arco BC e a amplitude do ângulo excêntrico BEC, sendo estas relacionadas com a amplitude do arco AD pela mesma propriedade. No entanto, a ideia do aluno consistiu em aplicar a propriedade de forma direta tal como aconteceu no exercício anterior, usando a amplitude dos ângulos BEC e AED. Tal como consta na Figura 4.19, o aluno fez um procedimento que seria válido se o ângulo BEC fosse um ângulo ao centro. Perante o equívoco de Luís provocada pela resolução da questão anterior, o investigador tentou redirecionar o seu raciocínio para que este apresentasse a resolução correta como se pode ver na Figura 4.20.

L – Praticamente tenho que fazer a mesma propriedade.
I – Usar a mesma propriedade do exercício anterior?
L – Acho que sim.
I – Porquê?
L – Porque, as únicas coisas que eles dizem que este ângulo [ângulo BEC] é 90 graus e que este arco [arco BC] é 66. Como este [ângulo BEC] está verticalmente oposto a este [ângulo AED] aqui também é 90.
I – Mas estás a tentar descobrir o quê?
L – O arco AD.

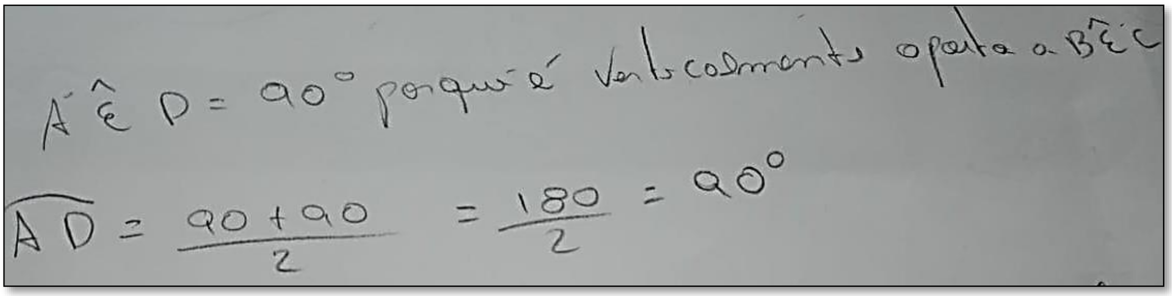


Figura 4.19 – Tentativa de resolução de Luís à questão 3: cálculo da amplitude do arco AD

I – Achas que a amplitude do arco AD é 90º?
L – Sim.
I – Então consideras que aplicaste bem a propriedade que tu usaste no exercício anterior?
L – Acredito que sim.
I – Mas o que diz a propriedade que estás a tentar usar?
L – Que este ângulo [ângulo BEC] é a soma dos arcos BC e AD a dividir por dois?
I – Mas foi isso que aplicaste?
L – Então, é como?
I – Na questão anterior querias saber a amplitude do ângulo excêntrico, por isso fizemos a semissoma dos arcos. Mas para obter a amplitude de um dos arcos fazemos o mesmo?
L – Acho que sim.
I – Tenta fazer exatamente o que tu farias quando pretendes saber a amplitude de um ângulo excêntrico.

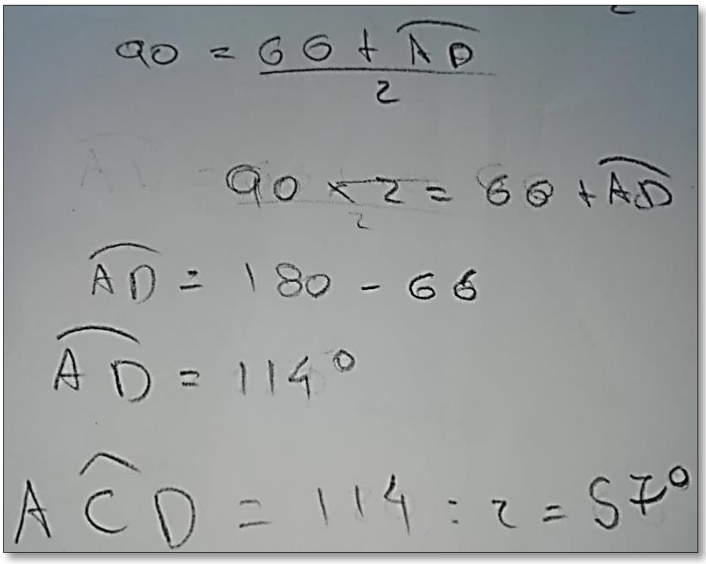


Figura 4.20 – Resolução de Luís à questão 3.

A atitude do aluno permite-nos acentuar dois pontos importantes: por um lado, parte do seu raciocínio foi guiada por aquilo que aconteceu na tarefa anterior, visto que a estratégia que pensou envolvia a mesma propriedade da questão anterior e que tinha considerado fácil e direta. Desta forma, inferiu que também seria direta nesta questão. Por outro lado, implícita à estratégia pensada pelo aluno está aquilo que geralmente se faz nas aulas quando se pretende calcular a amplitude de um ângulo inscrito, ou seja, determinar primeiro a amplitude do arco associado.

Conforme se pode observar, no diálogo seguinte Luís justifica a sua ação como sendo evidente e por isso não analisou a existência de outras estratégias. Podemos destacar que o aluno preferiu o que lhe é mais familiar e não teve o sentido crítico de explorar a existência de outras estratégias em que corria menos risco de cometer erros.

> I – Tiveste algumas dificuldades em implementar a propriedade vista na questão anterior porque pensaste que desta vez também seria direta?
> L – Por acaso pensei.
> I – Porque é que não te ocorreu uma outra forma de chegar ao ângulo?
> L – É porque era óbvio.
> I – Quer dizer que é mais óbvio para ti procurar o arco quando queres saber a amplitude de um ângulo inscrito?
> L – Sim.
> M – Mas não pensaste que podia haver outra estratégia com menos risco de errar?
> L – Não.

No diálogo seguinte, embora tenha concordado que poderia haver uma segunda estratégia, expressou dificuldades em explorar outra hipótese de encontrar a amplitude do arco AD, que, do nosso ponto de vista, é mais acessível comparado com o que Luís fez. Quando questionado sobre o facto de ter lido ou não o enunciado, o aluno responde afirmativamente, mas percebe-se que existe uma informação no enunciado que não acrescentou nada ao seu raciocínio, por este manifestar dificuldades em lembrar-se da propriedade. O aluno, após determinar a amplitude do arco CD, admite que o arco AD tem a mesma amplitude, justificando apenas pelo aspeto visual. Após uma orientação do investigador, Luís consegue liberar-se do constrangimento manifestado.

> I – Haverá então outra forma?
> L – Haverá, agora não sei.
> I – Pensa lá. Leste o enunciado?
> L – Sim.
> I – Então consegues ver outra forma?
> L – No máximo que posso fazer é descobrir este arco [arco CD] que dá 180 menos este arco [arco BC].
> I – Ok e depois?
> L – O CD e AD são iguais.
> I – Porquê?
> L – Olhando para a figura parecem ser iguais.
> I – E podes justificar desta forma?
> L – Não sei.
> I – Não há nenhuma informação que te ajuda a justificar isso?
> L – Qual?
> I – Uma reta perpendicular a uma corda no seu ponto médio divide cada um dos arcos que determina em duas partes geometricamente iguais. Vimos isso na aula.
> L – Tenho dificuldades em lembrar-me destas propriedades.
> I – E agora?
> L – Agora CD é 180-66 que dá 114 e AD também. E o ACD é 114 a dividir por dois, dá 57.

No que toca à comparação entre as duas estratégias anteriores o aluno reconhece que a última é mais fácil. Quanto à abordagem de uma outra estratégia semelhante à anterior e por aplicação da mesma propriedade, o aluno declara não ter visto. Neste caso, permite-nos compreender a dificuldade de Luís em explorar uma estratégia que envolve algumas propriedades da estratégia anterior, porque talvez considere que uma determinada propriedade apenas se pode usar uma vez. Assim como os arcos CD e AD têm a mesma amplitude pela propriedade vista anteriormente, os arcos AB e BC têm a mesma amplitude de forma similar.

I – Comparando as duas estratégias, o que achas mais fácil?
L – Esta é mais fácil.
I – Consegues ver uma estratégia parecida com o que nós vimos há pouco, mas com algumas diferenças?
L – Não vejo.
I – Qual é a amplitude do arco AB?
L – Também é 66. Por aquela propriedade.
I – Certo. E depois?
L – Ah! Podemos fazer 180 - 66 dá o AD e depois determinámos o ACD.

Uma quarta estratégia consistia em modificar a estratégia anterior, ou seja, uma vez determinada a amplitude do arco AB, existem dois caminhos possíveis para encontrar a amplitude do ângulo pretendido: calcular a amplitude do arco AD, tal como foi vista anteriormente, ou calcular a amplitude do ângulo AOB. Quando o aluno foi solicitado a explorar esta última hipótese, não percebeu de imediato e quando incentivado pelo investigador começou por relacionar de forma errada o arco AB com o ângulo BEA, como se este fosse um ângulo ao centro. Além disso, percebe-se que Luís pretendia determinar a amplitude do ângulo EAO pela soma dos ângulos internos do triângulo [OAE] tal como fez nas questões anteriores, mas só que desta vez este procedimento não acrescentaria nada à sua resolução.

Tendo em conta o procedimento que consiste em modificar uma estratégia, é necessário destacar as dificuldades que o aluno demonstra em alterar um conjunto de etapas de uma estratégia que já tinha sido executada de forma a obter um novo conjunto de etapas possível, resultando numa nova estratégia. Isso demonstra uma das dificuldades que revela quando tenta ser mais flexível.

I – Muito bem! Agora consegues fazer alguma alteração na estratégia anterior para obter uma outra estratégia possível?
L – Não consigo.
I – Pensa lá mais um bocadinho.
L – Já pensei.
I – Sabendo a amplitude do arco AB, podemos percorrer um outro caminho ou não?
L – Posso relacionar com o ângulo BEA.
I – Achas que podes relacionar com o ângulo BEA?
L – Ah! Aquele não dá.
I – Normalmente relacionamos um arco com um ângulo inscrito ou?
L – Ou um ângulo ao centro. Então este [ângulo BOA] também é 66.
I – E depois?
L – O AEO é 90º. E podíamos encontrar o EAO.
I – Sim, mas o que isso acrescenta?

L – Não consigo avançar.
I – Tens ali um ângulo que dá jeito.
L – Este [ângulo AOD]. Dá 114.
I – E agora?
L – Agora não sei.
I – Consegues relacionar o ângulo AOD com o ACD?
L – ACD é metade do AOD.

A respeito da análise de uma outra estratégia já abordada pelo Luís nas duas questões anteriores, baseia-se no cálculo dos ângulos internos do triângulo [CDE]. Mas curiosamente o aluno destacou que não percebeu que o ângulo pretendido era um dos ângulos internos do triângulo e muito menos ter notado que havia um triângulo visível na figura.

I – Existirá uma outra hipótese?
L – Acho que sim. Agora não sei por onde.
I – O ângulo que nós queremos faz parte do quê?
L – De um triângulo retângulo.
I – Esta não é uma das hipóteses?
L – Eu não vi. Não vi. O EDC é 33 e CED 90 e 180 - 90 - 33 dá o ACD.
I – Qual é a estratégia mais apropriada para esta questão?
L – Ir pelo triângulo.
I – Mas porquê?
L – Não existe tanto cálculo.
I – Achas que essa forma envolve menos cálculos do que as outras?
L – Mais ou menos.

Assim como nas outras questões abordadas, o investigador pretendia saber qual seria a opinião do aluno mediante a escolha de uma estratégia que este considerasse mais adequada ou mais fácil. Luís considera a estratégia da soma dos ângulos internos a mais apropriada porque não envolve tantos cálculos. No entanto, o aluno parece não ter certeza da sua escolha porque não analisou com mais atenção, considerando outros critérios que poderão contribuir para uma melhor escolha. Naturalmente havia outras estratégias que envolvem poucos cálculos. Parece-nos importante referir que o aluno apenas comparou duas estratégias que lhe são familiares e escolheu a que envolve menos cálculos, neste caso, considerou a sua estratégia inicial e a estratégia da soma dos ângulos internos do triângulo.

Questão 4

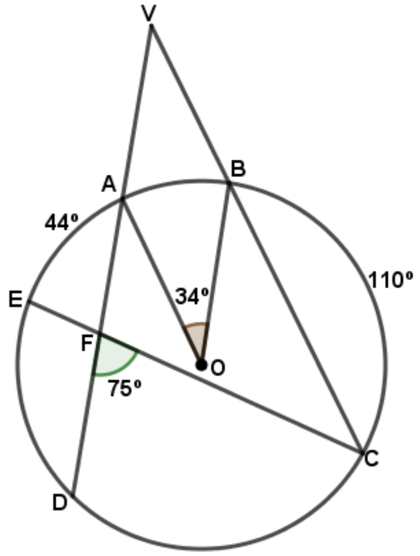
Na figura está representada uma circunferência de centro O.

Sabe-se que:

- os pontos A, B, C, D e E pertencem à circunferência;
- as cordas [AD] e [BC] têm o mesmo comprimento;
- F é o ponto de interseção das cordas [EC] e [AD];
- V é o ponto de interseção das retas AD e BC;
- o arco EA tem amplitude 44º;
- o arco BC tem amplitude 110º;
- o ângulo AOB tem amplitude 34º;
- o ângulo CFD tem amplitude 75º.

A figura não está desenhada à escala.

Qual é a amplitude, em graus, do ângulo CVD?



Ao estabelecer contacto com esta tarefa, o aluno refletiu, por alguns instantes, mas como estava a demorar a iniciar a sua resolução o investigador pretendeu saber o que o aluno estava a pensar. Pelo diálogo seguinte, Luís começou por determinar um dos ângulos internos do triângulo [CFV], neste caso o ângulo AFC. Apesar de ser bastante óbvio calcular a sua amplitude o aluno começou por cometer alguns erros e após perceber isso desistiu e passou a calcular a amplitude do ângulo ECB. Em seguida determinou a amplitude do ângulo AFC e apresentou a sua resolução (Figura 4.21). Estes primeiros cálculos pressupõem que o aluno começou por concentrar as suas ideias no respetivo triângulo e, tal como disse, justifica-se pelo facto do ângulo que procura ser um dos ângulos internos do triângulo.

> I – Podes explicar o que estás a pensar?
> L – A descobrir aqui o arco AB, que é 34 igual ao ângulo ao centro. Depois ia descobrir o AFC, ia fazer os 34 mais o 110 menos o 75.
> I – Queres descobrir o ângulo AFC, mas não percebi a tua ideia. Explica lá melhor.
> L – Era somar estes dois [arcos AB e BC] e subtrair 75.
> I – Mas porque é que estás a fazer isso?
> L – Não vai dar.
> I – Vê lá isso.
> L – Este ângulo aqui [ângulo ECB] é 34 mais 44 a dividir por 2, dá 39.
> I – Certo e depois?
> L – Agora é só descobrir este ângulo aqui [ângulo AFC] e está feito.
> I – E como descobres o ângulo AFC?
> L – Ah! É 180 menos 75.

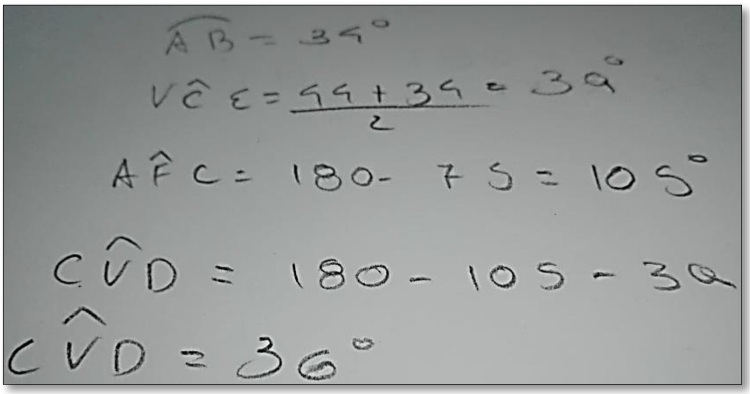


Figura 4.21 – Resolução de Luís à questão 4.

A ideia de Luís merece algumas considerações: (i) na questão anterior o aluno inicialmente não tinha percebido que o ângulo pretendido era um dos ângulos internos de um triângulo e nesta questão a sua primeira preocupação foi averiguar se existia uma situação parecida. Portanto, uma vez, mais o seu raciocínio foi encaminhado pelo exercício anterior, ou seja, identificou uma estratégia que considerou mais fácil na questão anterior e esta seria a primeira estratégia a explorar na questão seguinte e (ii) de acordo com o diálogo que a seguir se apresenta o aluno parece adotar a soma dos ângulos internos de um triângulo como a estratégia que considera mais fácil até ao momento.

I – Muito Bem. Então a tua estratégia inicial foi pensar no triângulo [CFV]?
L – Sim.
I – Mas o que é que te fez concentrar naquele triângulo e não noutra estratégia?
L – Porque o ângulo que queria descobrir faz parte do triângulo.
I – Mas no exercício anterior não tinhas percebido isso, agora que percebeste começaste por aí?
L – Sim. Percebi que o triângulo é a forma mais fácil.

Acerca da abordagem de uma segunda estratégia, parece-nos evidentes as dificuldades que o aluno continua a revelar ao explorar uma segunda estratégia, após implementar a primeira. Até o momento o aluno apenas abordou ângulos excêntricos de vértice no interior da circunferência, desta feita o ângulo excêntrico tem vértice no exterior da circunferência, cuja amplitude se obtém pela semidiferença das amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados. Luís, com uma ajuda do investigador, reconheceu o ângulo e a forma como se calcula a sua amplitude, mas vê-se que necessitava de uma segunda ajuda para calcular a amplitude do arco CD, apesar de existirem várias hipóteses para esse efeito.

Uma das hipóteses para calcular a amplitude do arco CD, seria recorrer à propriedade do ângulo excêntrico DFC, mas o aluno apresentou dificuldades no uso correto da propriedade, apesar de ter feito essa abordagem nas questões anteriores. Foi necessário dizer ao aluno que teria de construir uma equação para resolver a situação.

I – Que outra estratégia podemos implementar?
L – Não estou a ver outra forma.

I – Que tipo de ângulo é o CVD?
L – É excêntrico.
I – Como se obtém?
L – Subtrair os arcos e dividir por dois.
I – E agora, já consegues avançar? (…) O que precisamos descobrir?
L – O arco CD.
I – Como podemos descobrir o arco CD?
L – Não sei
I – Não sabes? Podemos fazer uma série de coisas para descobrir a amplitude do arco CD.
L – Mas, não estou a ver.
I – Então e se usares o ângulo excêntrico CFD para encontrar o arco CD?
L – Então é este [arco EA] mais este [ângulo CFD] a dividir por 2.
I – Estás a pensar bem? Tu queres saber o arco e não o ângulo.
L – Não sei.
I – Tens que construir uma equação para determinar o arco CD.
L – Então $75 = (\widehat{DC} + 44)/2$, descobrimos o DC.
I – E depois?
L – Depois fazemos $(\widehat{CD} - \widehat{AD})/2$ e descobrimos o CVD.

Realmente o conhecimento de algumas propriedades e saber aplicá-las num determinado procedimento é um dos grandes obstáculos de Luís na exploração de diversos processos de resolução. Tendo em conta que as cordas [AD] e [BC] têm o mesmo comprimento, a outra hipótese para encontrar a amplitude do arco CD consistia em considerar que o arco AD e BC têm a mesma amplitude. Perante as dificuldades, o aluno necessitou de um auxílio do investigador para conseguir chegar ao resultado pretendido.

I – Muito bem. Como descobrimos a amplitude do arco DC sem usar o ângulo externo CFD?
L – Só mesmo sabendo este aqui [ângulo CVD].
I – Mas o ângulo CVD é o que tu queres saber.
L – Então…
I – Se soubermos a amplitude do arco ED, conseguimos. Mas, como descobrimos a amplitude do arco ED?
L – Não sei.
I – Não tens nenhuma informação na figura que te possa ajudar?
L – Não sei que informação pode ajudar.
I – Diz o enunciado que as cordas [AD] e [BC] têm o mesmo comprimento. O que podes concluir?
L – Não me lembro.
I – Não tínhamos visto na aula que cordas iguais correspondem arcos iguais?
L – Sim. Então AD também é 110. E ED é 110 menos 44. Fazemos 360 menos tudo dá o CD.
I – Era mais uma hipótese de calcular a amplitude do arco CD, não é?
L – Sim.

A estratégia que abrange um ângulo externo e os internos não adjacentes de um triângulo, tantas vezes abordada nas questões anteriores e que o aluno nunca pensou nela, continuou a afirmar que não se lembrava.

I – E haverá outra hipótese de resolução?
L – Só para descobrir esta já foi o que foi, agora já não sei mais.
I – Considerando o triângulo [CFV], que tipo de ângulo é o CFD relativamente ao triângulo?
L – É externo.
I – Lembras-te como se relaciona a amplitude de um ângulo externo com a amplitude de dois ângulos internos não adjacentes?
L – Não me lembro.
I – A amplitude do ângulo externo é a soma das amplitudes de dois ângulos internos não adjacentes.
L – Então, o CVD vai ser 75 menos o FCV.

No que se refere à melhor estratégia, a escolha de Luís reforça o pressuposto de que adotou a estratégia da soma dos ângulos internos como preferida e que, segundo este, é mais direta. Além disso, considera que é fácil decorar a estratégia quando comparado com outras estratégias.

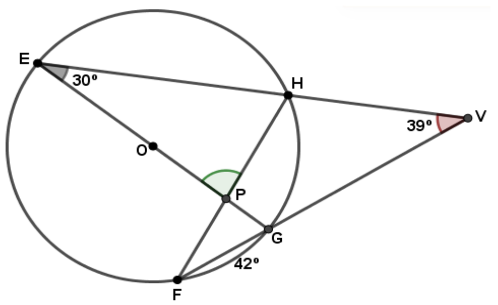
I – Das estratégias que já vimos o que escolhes como sendo a melhor?
L – O que tinha feito no início.
I – Porquê?
L – É mais direta?
I – É porque apenas envolve menos cálculos ou porque também envolve menos outras coisas?
L – Acho que é mais fácil para decorar.
I – Mas, tu não tinhas decorado.
L – Pra mim é mais fácil.
I – Mais fácil quer dizer o quê?
L – Efetuar menos cálculos.
I – Mas a estratégia do ângulo externo não tem menos cálculos?
L – Acho que não me ia lembrar da propriedade e a soma dos ângulos internos é mais fácil me lembrar.

Em conformidade com as opiniões do aluno parece-nos que analisou as questões anteriores, percebeu que a estratégia da soma dos ângulos internos foi a mais fácil e definitivamente escolheu-a para implementar nas questões seguintes. Vejamos o que acontece na próxima questão.

Questão 5

Na figura está representada uma circunferência de centro O em que:

- E, F, G e H são pontos da circunferência;
- [EG] é um diâmetro da circunferência;
- O ponto P é o ponto de interseção de [EG] com [FH];
- O ponto V é o ponto de interseção das retas EH com FG;
- O ângulo EVF tem amplitude 39º;
- O ângulo GEH tem amplitude 30º;
- O arco FG tem amplitude 42º.



Qual é amplitude, em graus, do ângulo EPH?

Nesta questão o ângulo pretendido constitui um dos ângulos internos de um triângulo. Além disso na figura pode-se observar os triângulos [EHP], [FHV], [EVG], [PGF], entre outros, que se podem obter traçando um lado em falta. Ao apresentar esta questão ao aluno, a sua atitude foi o que o investigador estava à espera, sem demoras e de forma autónoma começou por determinar a amplitude do ângulo EHF porque era o que precisava para encontrar a amplitude do ângulo EPH, aplicando a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, tendo apresentado a sua resolução patente na Figura 4.22. Quando confrontado acerca de estratégias melhores o aluno afirma que começou por pensar em três triângulos e não pensou noutras estratégias.

O procedimento do aluno requer algumas considerações: (i) o aluno não demonstrou dificuldades em implementar a sua primeira estratégia ao contrário do que sucedeu nas questões anteriores; (ii) confirma-se que a estratégia da soma dos ângulos internos do triângulo é o que aluno prefere; (iii) efetuou cálculos desnecessários para a estratégia que pensou ao determinar a amplitude do arco HG; (iv) pensou na amplitude do arco EF, mas o foco nos triângulos não permitiu que ele percebesse que bastava efetuar $180° - 42°$; (v) não demonstrou eficácia e sentido crítico ao pensar nos três triângulos em simultâneo, ao invés de averiguar se apenas um dos triângulos (por exemplo o [PGF]) permitia obter a amplitude do ângulo EPH de forma mais fácil e (vi) pensou num conjunto de passos previamente, mas sempre guiado pelo uso dos três triângulos.

I – Explica o que fizeste?
L – Então tive que descobrir este arco [arco HG] que é dobro deste ângulo [ângulo HEG]. O EGV fiz 180 menos estes dois [ângulos HEG e EVG] que vai dar 111. Depois o PGF foi 180 menos 111 que dá 69. Depois com este ângulo [ângulo PGF] descobri o arco EF, depois com este arco descobri aquele ângulo [ângulo EHF]. Depois 180 menos este [ângulo HEP] e este [ângulo EHF], dá EPH.
I – Muito bem! Começaste por pensar no quê?
L – Fui pensar nos triângulos.
I – Que triângulos?
L – No [EVG], no pequenino [PGF] e no [EHP].
I – Mas pensaste primeiro num conjunto de procedimentos que permitem chegar ao resultado ou foste caminhando?
L – Pensei primeiro nos passos que dava pra chegar lá.
I – Mas não pensaste que poderia haver estratégias menos complicadas?
L – Não pensei.

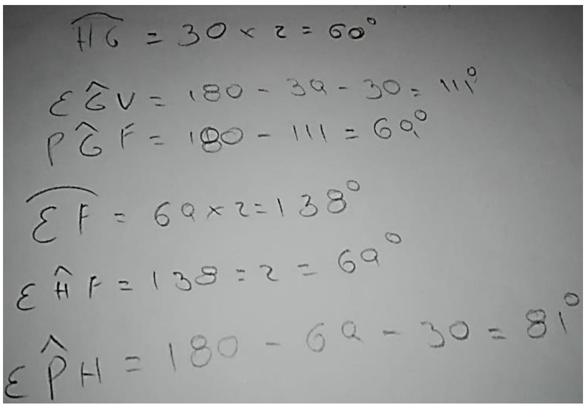


Figura 4.22 – Resolução de Luís à questão 5.

Tal como tem vindo a acontecer após o aluno implementar a sua primeira estratégia, não consegue implementar uma segunda estratégia a não ser que não obtenha sucesso na primeira estratégia utilizada. No processo anterior determinou a amplitude do ângulo PGF, um dos ângulos internos do triângulo [PGF], mas movido pelo seu raciocínio inicial não percebeu que pelo mesmo triângulo conseguia chegar ao resultado, bastando para isso obter a amplitude do ângulo PFG através da amplitude do arco HG e calcular a amplitude do ângulo GFP, sendo este verticalmente oposto ao ângulo EPH.

> I – Então, agora convido-te a pensar noutra estratégia.
> L – Não sei.
> I – Pensa lá. Consegues fazer uma alteração na tua estratégia anterior de modo a reduzir o número de passos?
> L – Já pensei, mas não consigo, ajuda lá.
> I – Há pouco pensaste no triângulo pequenino [PGF], qual a amplitude do ângulo GFP?
> L – É 30, metade do arco HG.
> I – E depois?
> L – Agora é 180 menos estes dois [ângulos PGF e PFG] e como são verticalmente opostos [ângulos GPF e EPH] está feito.

Quanto à outra alternativa abordada no diálogo seguinte, o aluno talvez iluminado pela estratégia anterior consegue perceber que o ângulo EHP poderia ser obtido a partir do ângulo PHV e só depois obter o ângulo EPH, um processo que do nosso ponto de vista é muito mais eficiente. Uma vez determinada a amplitude do ângulo PHV, é possível calcular a amplitude do ângulo EPH por aplicação imediata da propriedade de um ângulo externo que o aluno tem sempre dificuldades em abordá-la.

> I – Ah pois! Mais alguma alternativa?
> L – Podemos encontrar o ângulo PHV e depois o EHP.
> I – Mas como?
> L – Usar este triângulo aqui [triângulo [FHV]]. Podemos fazer 180-30-39 dá o PHV. E depois obtemos o EHP e o EPH.
> I – Certo! Esta hipótese é uma alteração da estratégia que implementaste anteriormente para encontrar o ângulo EHP, mas que só viste agora porque pensaste melhor?
> L – Sim.
> I – Muito bem. Mas consegues obter o EPH apenas usando o ângulo PHV?
> L – Como?
> I – O ângulo PHV relativamente ao triângulo [EPH], que tipo de ângulo é?
> L – Externo. Então EPH é 30 menos o PHV.

Um processo diferente dos que já foram vistas até ao momento, baseia-se no cálculo dos ângulos internos do quadrilátero [HPGV], dado que um dos ângulos internos é adjacente ao EPH. A reduzida capacidade visual de Luís causou-lhe dificuldades em perceber que havia um quadrilátero na figura. No entanto reconhece que a soma dos ângulos internos do quadrilátero é igual a um ângulo raso.

I – Certo! Podemos ver se há um processo diferente dos que já foram vistos?
L – Pode haver. Mas…
I – E se pensares num polígono que ali tens sem ser um triângulo?
L – Qual?
I – Não consegues ver um polígono que não seja um triângulo?
L – Não vejo.
I – O [HPGV] que polígono é?
L – Quadrilátero.
I – Certo. E depois?
L – Não sei.
I – Um dos ângulos internos do quadrilátero tem alguma relação com o ângulo que nós queremos?
L – Aquele ângulo [ângulo HPG] e são suplementares.
I – Como descobrimos a amplitude do ângulo HPG?
L – Não estou a ver.
I – O quê que tu sabes sobre a soma dos ângulos internos de um quadrilátero?
L – Dá 360. Determinamos estes dois ângulos [PHV e PGV] e vamos ao HPG e EPH.

Após tantas estratégias abordadas o aluno parece duvidar que existam mais hipóteses. Uma hipótese que está relacionada com o tipo de ângulo em causa e que na nossa perspetiva já deveria ter sido explorada pelo aluno baseia-se na aplicação da propriedade do ângulo externo de vértice no interior da circunferência começando por determinar a amplitude do arco EH. Importa salientar que havia outras estratégias que poderiam ser implementadas por alteração de algumas estratégias já efetuadas ou começando por traçar alguns segmentos na figura de modo a construir um triângulo que aparentemente não está completamente desenhado, mas, por questão de espaço, optamos por não abordar as mesmas.

I – Vamos tentar explorar outra estratégia?
L – Ainda existe mais?
I – Tu alguma vez pensaste no tipo de ângulo que nós queremos saber?
L – Claro é um ângulo excêntrico!
I – E então, o que precisas para o determinar?
L – Os arcos EH e FG. Dava para encontrar EH fazendo 180 menos HG. Depois é somar e dividir por 2.
I – E agora poderias-me dizer que estratégia escolherias para esta questão?
L – O que eu fiz.
I – Mas porquê? Havia estratégias com menos etapas e que demoram menos tempo.
L – Mas não consegui fazer.

No que concerne à escolha de uma estratégia, curiosamente o aluno escolhe o que fez, apesar de existirem estratégias que envolvem menos cálculos e cuja duração seja inferior. Tal como podemos observar no diálogo seguinte, Luís tem preferência por escolher uma estratégia que conseguiu fazer mesmo tendo consciência de que esta envolve mais cálculos ou demore mais tempo na sua concretização em detrimento das estratégias que o mesmo não conseguiu pensar ou revelou dificuldades na sua abordagem.

No final da experiência, Luís manifestou a sua opinião sobre as dificuldades que revelou no uso de múltiplas estratégias e qual a importância que atribui à aprendizagem e uso de múltiplas estratégias. A falta de hábito na abordagem de diversos processos de resolução, o conhecimento de algumas propriedades e a sua opção pela resolução mais fácil influenciaram pela negativa a abordagem de Luís nesse processo.

> I – O que influenciou a tua abordagem na exploração de diversos processos de resolução?
> L – Não estou acostumado a fazer dessa forma.
> I – O que mais influenciou?
> L – Não me lembrava de algumas propriedades. Resolver de uma maneira e não pensar que existem outras formas. Apenas ia pela maneira mais fácil pra mim e por causa disso acabava por não ver outras maneiras de o fazer.

Por outro lado, a experiência teve uma influência positiva no desenvolvimento da capacidade ou perceção de Luís no que se refere à exploração de diversos processos de resolução. Relativamente à aprendizagem e uso de múltiplas estratégias, Luís considera que é importante porque os exercícios seriam mais fáceis de resolver.

> I – O que aprendeste com a experiência?
> L – Aprendi que nunca há uma maneira de fazer os exercícios.
> I – Qual a importância de aprender a resolver um exercício de várias formas?
> L – Os exercícios são mais fáceis de resolver quando sabemos fazer de várias formas.

4.3.3. Análise final

Fatores que influenciaram o processo de resolução

Durante a abordagem das questões propostas vários fatores influenciaram o processo de resolução de Luís. O aluno demonstrou muitos obstáculos a nível do conhecimento dos conteúdos, sendo este um fator determinante neste processo. Algumas noções trabalhadas em aula relacionadas com as propriedades dos ângulos, arcos e cordas definidos numa circunferência que o aluno afirmou muitas vezes não recordar, a aplicação de algumas propriedades de forma errada, as dificuldades em estabelecer diferenças entre algumas noções, a falta de alguns pré-requisitos foram alguns dos intervenientes que dificultaram a execução de uma estratégia de forma eficaz. Outro aspeto de grande relevância é a reduzida capacidade de visualização geométrica do aluno, tendo em conta que muitas vezes não recolheu informações relevantes na figura e importantes para a implementação de uma das estratégias.

Escolhas feitas e justificação

Analisando as questões propostas, geralmente quando Luís apresenta uma resolução é capaz de justificar bem o que faz. Durante a experiência verificámos que a escolha da primeira estratégia do aluno assenta principalmente no que conseguiu fazer nas questões anteriores, ou seja, a estratégia a adotar numa determinada questão é influenciada pelo grau de facilidade da mesma na questão anterior. Se a referida estratégia não for possível implementar ou o aluno não perceba que poderá implementá-la, a segunda opção adotada está relacionada com as características do que se pretende saber, isto é, um procedimento que foi abordado nas aulas de Matemática. Aleada às estratégias que o aluno geralmente implementa, a sua justificação para as suas escolhas consiste no que considera mais fácil, envolve menos cálculos, é mais evidente e mais direta.

Dificuldades na exploração de diversos processos de resolução

Luís evidenciou grandes dificuldades na exploração de diversos processos de resolução. Com exceção da última questão, o aluno manifestou dificuldades na exploração das suas primeiras estratégias necessitando de um apoio extra do investigador. Verificou-se também que após implementar uma primeira estratégia o aluno tem sérias dificuldades em abordar de forma autónoma uma segunda estratégia, a menos que a primeira tentativa não tenha sido eficaz. Durante a procura por diversas alternativas de resolução, a capacidade de exploração do aluno reduz à medida que este tenha contatos com novas estratégias, ou seja, torna se cada vez mais difícil visualizar uma nova possibilidade.

A dificuldade do aluno torna-se mais evidente quando o mesmo não domina determinados conteúdos e, mesmo que a estratégia associada ao respetivo conteúdo seja abordada várias vezes, ainda assim revela dificuldades em abordá-la nas questões subsequentes. Outra perspetiva, manifesta-se no foco que o aluno deposita numa primeira estratégia, dificultando que este tome alguma iniciativa que consiste em descartar a estratégia inicial e explorar uma nova. O processo de resolução de Luís também foi influenciado quando este considerou que já não existiam outras hipóteses de resolução, o que não lhe permitiu ter um sentido crítico face à existência de outras estratégias.

Outro aspeto que consideramos relevante é a capacidade do aluno em modificar algumas etapas dentro de uma estratégia que poderão resultar noutras estratégias possíveis. Luís manifestou dificuldades quando solicitado pelo investigador a modificar a sua estratégia inicial mediante ações que reduzem o número de etapas e o tempo de duração. Em resposta a esta proposta do investigador, o aluno afirmava que não conseguia efetuar essa alteração.

Critérios de escolha entre os diversos processos de resolução

Durante a experiência, podemos constatar que Luís nem sempre escolhe a melhor estratégia para uma determinada tarefa. Após explorarmos vários processos de resolução o critério de escolha do aluno para a estratégia que considera melhor, baseia-se essencialmente no que consegue fazer e o que acha mais fácil decorar. Em algumas situações verificou-se também que o aluno tende a escolher estratégias que sejam mais confiáveis, ou seja, o que está mais habituado a fazer nas aulas de Matemática que, do nosso ponto de vista, são as mais familiares para o aluno.

Importa-nos salientar que a escolha do aluno não teve em conta todas as características da estratégia, nomeadamente o número de passos necessários, o tempo de duração e os conteúdos que o aluno necessitava saber para o implementar. Para Luís o mais importante é escolher uma estratégia que ele tenha feito independentemente (i) das dificuldades que revelou durante a sua abordagem e (ii) envolva mais cálculos. A falta de sentido crítico do aluno para estabelecer comparações mais detalhadas entre duas ou mais estratégias leva-o muitas vezes a escolher estratégias sem qualquer análise, revela a sua reduzida capacidade de escolha da estratégia melhor ou ótima para uma determinada tarefa.

5. Conclusões

Neste capítulo procura-se especificar as principais conclusões do estudo desenvolvido que foi possível deduzir a partir dos dados apresentados no capítulo anterior, atendendo ao objetivo do estudo, às questões orientadoras e às opções metodológicas adotadas na sua implementação. Com este estudo pretendeu-se analisar se os alunos do 9.º ano conseguem explorar diversos processos de resolução de uma tarefa, de forma assertiva e flexível e identificar os principais fatores que interferem com esse processo. Para dar resposta a esta temática procuramos responder às seguintes questões de investigação:

(i) Que fatores influenciam o processo de resolução dos alunos?

(ii) Que escolhas os alunos fazem quando adotam um determinado procedimento na resolução de uma tarefa e como justificam essas escolhas?

(iii) Que dificuldades os alunos revelam na exploração de diversos processos de resolução?

(iv) Quais os critérios em que se baseiam para escolher entre dois processos de resolução possíveis?

5.1. Fatores que influenciaram o processo de resolução

Um dos principais fatores que influenciaram o processo de resolução dos alunos é a falta de domínio dos conteúdos e de alguns pré-requisitos. O conhecimento dos conteúdos teve grande impacto no processo de resolução dos alunos, principalmente no caso de Luís e de Maria. Esta influência manifestou-se sobretudo no uso incorreto de algumas noções, na distinção entre algumas propriedades que são semelhantes como, por exemplo, distinguir as propriedades do ângulo excêntrico de vértice no interior das propriedades, do ângulo excêntrico de vértice no exterior da circunferência, em algumas propriedades que os alunos não sabiam como aplicar e no uso de algumas propriedades relativamente às quais os alunos afirmavam sistematicamente não se lembrarem.

A leitura completa e a compreensão do enunciado são aspetos de grande relevância na resolução de tarefas (Tambychik & Meerah, 2010), mas por vezes os alunos optaram por recolher informações apenas na figura, como é o caso de José e de Maria. Nas questões semelhantes às que foram propostas, José habitualmente começa por analisar e recolher informações da figura porque percebe melhor. Conclui-se, portanto, que a maioria das vezes que o aluno abordou este tipo de questões, não foi necessária uma leitura completa do enunciado, mas neste caso, influenciou algumas decisões do aluno. Maria leu o enunciado completo das primeiras questões, mas depois não o fez, considerando que as informações da figura eram suficientes.

Em algumas tarefas, a resolução dos alunos foi afetada pela falta de informação no enunciado ou pelo excesso da mesma. Maria considerou que havia falta de informações no enunciado e que isso influenciou a sua abordagem. No que se refere ao excesso de informação principalmente nas figuras, verificou-se que, à medida que aumenta a quantidade de informações, os alunos tendem a revelar mais obstáculos na sua articulação. Esses constrangimentos incidem-se nas decisões dos alunos relativamente a informações que são relevantes e quais as que não são para um determinado processo de resolução, tal como referem Tambychik e Meerah (2010).

5.2. Escolhas feitas e justificações

Este estudo sugere algumas escolhas feitas pelos alunos aquando da implementação da primeira estratégia, bem como as justificações para não explorarem resoluções alternativas.

Geralmente a primeira estratégia implementada é aquela que os alunos consideram mais fácil, óbvia ou direta, porque envolve menos cálculos, menos conteúdos e menos tempo a ser concluída. De acordo com os autores Newton e Star (2009) e Maciejewski1 e Star (2019), estas justificações estão relacionadas com a eficiência, uma vez que o foco consiste em reduzir o tempo de realização da tarefa ou o número total de etapas necessárias para a sua resolução. No entanto, ao longo da experiência Maria e Luís não analisaram o grau de eficiência da primeira estratégia no sentido de estabelecer comparações com outras estratégias, apenas se limitaram a dizer que era "fácil" porque foi o que conseguiram fazer. No caso de José, a ausência dessa análise apenas se verificou na parte inicial da experiência, sendo que nas últimas questões propostas notou-se uma mudança de atitude por parte do aluno. Após iniciar a resolução, se o aluno percebe que a estratégia que iniciou envolve muitos cálculos então abandona-a e inicia uma nova ou, como se verificou noutra situação, antes de iniciar a sua resolução começa por analisar um conjunto de estratégias e escolhe a que tem menos cálculos. Na perspetiva de Maciejewski1 e Star (2019) a justificação de José para não escolher uma estratégia inicial ou desistir de uma estratégia porque implica efetuar mais cálculos enquadra-se no tipo de justificação "evitar possíveis estados ou operações futuras". O aluno reconhece que o seu procedimento resulta numa situação indesejada e por isso não escolhe esse caminho.

No caso de Maria, a primeira estratégia que implementou era a que estava mais habituada a fazer nas aulas de Matemática, considerando mais segura a sua escolha. Verificou-se que Luís, em algumas situações, adotou uma estratégia que estava diretamente relacionada com as características do que se quer saber, ou seja, aquilo que a maioria das vezes fora efetuado nas aulas de Matemática. A atitude dos alunos é explicada por Verschaffel *et al.* (2009), na medida em que a escolha da estratégia pode basear-se no que o aluno confia mais ou de acordo com a comunidade na qual o aluno está inserido. Newton e Star (2009) também consideram que os alunos tendem a confiar na sua própria familiaridade.

Outra justificação para a estratégia inicial identificada nas resoluções de Luís recai na categoria de justificação algorítmica definida no estudo dos autores Maciejewski1 e Star (2019). A primeira estratégia do aluno depende da realização da tarefa anterior, ou seja, o aluno adere a um procedimento previamente desenvolvido. O aluno adotou uma estratégia fixa e implementou-a sem a adaptar de uma maneira eficiente, ou necessariamente ótima, à tarefa atual.

Em alguns casos, os três alunos justificaram a escolha da primeira estratégia como sendo a primeira que viram, ou seja, assim que pensaram na estratégia implementaram-na de imediato. Ora esta declaração dos alunos, segundo os autores Maciejewski1 e Star (2019), não é uma justificação no sentido tradicional, mas é muito comum nos alunos.

Tendo em conta as escolhas dos alunos, podemos enquadrá-los consoante os tipos de raciocínio matemático que implementam na resolução de tarefas, definido por Lithner (2008) e Boesen *et al.* (2010). Durante a maioria das abordagens de José verificou-se que este optava sempre por implementar o seu próprio método de resolução independentemente do que fez nas outras tarefas ou do que é feito com mais regularidade nas aulas, pelo que o raciocínio do aluno é criativo. Maria e Luís implementaram um raciocínio matemático imitativo baseado na realização de algoritmos que, de acordo com Boesen *et al.* (2010), os argumentos para a escolha das estratégias não se baseiam na criação de um novo método de resolução. Maria tem preferências por implementar estratégias relacionadas com o que aprendeu nas aulas e que está mais habituada a fazer. Segundo Lithner (2008), a escolha da estratégia da aluna é baseada numa tarefa familiar, ou seja, a aluna aplica uma sequência de regras para resolver um determinado tipo de tarefa. Quanto a Luís, a escolha da estratégia depende maioritariamente da estratégia que implementou na tarefa anterior, imitando o procedimento efetuado considerando que está na mesma situação.

5.3. Dificuldades na exploração de diversos processos de resolução

Durante a implementação do estudo, os três alunos apresentaram várias dificuldades na exploração de múltiplas estratégias. Ao longo da experiência, as dificuldades foram mais notadas durante o raciocínio de Maria e de Luís. No caso de José, essas dificuldades reduziram significativamente no decorrer do estudo. Em seguida apresentamos alguns aspetos que dificultaram a perspicácia dos alunos durante a procura por novas estratégias de resolução.

Tal como referiram os alunos, a falta de hábito na exploração de vários processos de resolução dificultou o pensamento dos alunos ao explorarem várias estratégias, bem como o desenvolvimento da flexibilidade. De facto, os autores Newton *et al.* (2010) afirmaram que o conhecimento prévio dos alunos sobre a flexibilidade tem grande impacto na implementação de estratégias de forma flexível.

No decorrer do estudo, o raciocínio de José foi melhor quando comparado com o de Maria e Luís, quer na aplicação da primeira estratégia, bem como na exploração de novas estratégias. Note-se que as características dos alunos são diferentes no que respeita à compreensão dos conteúdos e a facilidade procedimental. Nesta perspetiva Newton *et al.* (2010) salientam que a facilidade de um aluno em abordar determinados conteúdos facilita a implementação de certos procedimentos do que um aluno que não tenha essa mesma capacidade.

Noutra perspetiva destacamos durante este estudo que o foco dos alunos numa estratégia familiar, ou que aparentemente é mais óbvia, não permitiu que implementassem uma estratégia diferente, mesmo que tivessem dificuldades na sua abordagem. A forma como sempre resolvem determinada tarefa na sala de aula contribuiu de forma negativa para a flexibilidade procedimental dos alunos. Por exemplo, no raciocínio de Maria era comum determinar a amplitude de um ângulo inscrito, começando por procurar o arco associado, tal como está habituada a fazer, acreditando que seria mais seguro e eficiente e impedindo a sua capacidade de usar outras estratégias para questões desse tipo. De um modo geral, o foco numa estratégia que um aluno considera eficiente e precisa, poderá reduzir a sua motivação para implementar novas estratégias (Newton *et al.*, 2010), tal como se verificou nas atitudes de Maria. Para os mesmos autores, Maria revela um conhecimento prévio de estratégias únicas para tarefas do mesmo género, exercendo uma influência negativa sobre o desenvolvimento da sua flexibilidade. Note-se que, durante a experiência, a familiaridade de Maria com uma estratégia aumentou a probabilidade da mesma se tornar menos flexível no uso de múltiplas estratégias, opinião defendida por Rittle-Johnson, Star e Durkin (2009) e Lithener (2000).

Verificou-se também que o aspeto visual foi determinante em alguns processos e a falta dessa capacidade dificultou bastante a exploração dos alunos. Além dos alunos afirmarem em algumas questões que não viram um triângulo ou um quadrilátero na figura que lhes permitiria explorar novas estratégias, os alunos também afirmaram constantemente "não vejo outras estratégias" quando solicitados a explorar novos processos. Segundo Garderen (2006), a deficiência do aspeto visual pode causar dificuldade em diferenciar, relacionar e organizar informações de forma significativa. O facto de os alunos não verem uma estratégia alternativa é intrigante, especialmente à luz da relação bidirecional entre o conhecimento conceptual e procedimental (Rittle-Johnson, Schneider & Star, 2015). No entanto, não se pode especular a partir desses dados se essa incapacidade de reconhecer uma solução alternativa é indicativa de um entendimento conceptual empobrecido dos conteúdos envolvidos no estudo ou se uma ação alternativa simplesmente não é aparente para os alunos (Maciejewski1 & Star, 2019).

Na mesma linha do que foi descrito anteriormente por um lado, a falta do conhecimento dos conteúdos e dos pré-requisitos e, por outro, a falta de capacidades na articulação entre os diversos conteúdos envolvidos no estudo, contribuíram para as dificuldades que os participantes tiveram durante a exploração de diversos processos de resolução, tal como foi referido por Tambychik e Meerah (2010). Uma vez que os alunos eram sujeitos a aplicar e integrar muitos conceitos matemáticos, a falta dessa capacidade influenciou a tomada de decisão dos mesmos ao tentarem implementar uma estratégia. Com base na opinião de Geary (2004), a falta de compreensão conceptual e do conhecimento procedimental dos participantes no estudo, que segundo o autor são essenciais para as capacidades dos alunos na resolução de tarefas, dificultou o foco e a interferência dos alunos no processamento da informação.

Uma das características que define a flexibilidade procedimental consiste em modificar procedimentos de outros procedimentos (Rittle-Johnson & Star, 2008; NCTM, 2014). Contudo, durante o estudo foi possível verificar a reduzida capacidade dos alunos em modificar etapas de uma estratégia já conhecida de modo a explorar novas estratégias. Neste caso permite-nos concluir, com base na opinião dos autores, o baixo nível de flexibilidade procedimental destes alunos no que respeita à modificação de procedimentos.

Outro aspeto que contribuiu de forma negativa para o sucesso dos alunos neste processo é o excesso dos vários processos de resolução. Notou-se nos três alunos que, à medida que aumenta o número de estratégias abordadas, reduz a capacidade dos mesmos de explorar uma nova. De acordo com os autores (Sweller, Merrienboer & Paas, 1998), quando os alunos abordam múltiplas estratégias pela primeira vez, as suas capacidades de trabalho diminuem devido à carga de processamento no contacto com várias estratégias em simultâneo.

Importa-nos salientar que, à medida que José foi estabelecendo proximidades com múltiplas estratégias, melhorou a sua capacidade de abordar várias estratégias em simultâneo. Além disso, o aluno já efetuava abordagens alternativas nos exercícios e testes na sala de aula. Blöte *et al.* (2001) demonstraram que os alunos começam a mostrar preferências por estratégias alternativas antes de começarem a usá-las regularmente. Por outro lado, as abordagens por novas estratégias não foram regulares em várias questões, sobretudo no caso de Luís e de Maria, ainda que tenham o conhecimento de múltiplas estratégias. Este aspeto vai de encontro ao estudo de Rittle-Johnson e Star (2008), onde sugerem que os alunos possam conhecer várias estratégias, mas optam por usar uma única estratégia para um determinado tipo de problema. Quando um aluno descobre uma estratégia de resolução que lhe permite resolver um problema com sucesso, persistirá em usar essa estratégia de resolução (Lewis, 1988). Com a prática continuada, o aluno estará mais propenso a continuar com o método que funciona, pois, usá-lo será mais automático e, portanto, mais fácil e rápido de executar (Anderson, 1982). A necessidade de estratégia alternativa por parte de Maria e de Luís manifestou-se apenas quando tiveram dificuldades na implantação da primeira estratégia escolhida. Elia *et al.* (2009) concluíram nos seus estudos que a flexibilidade da estratégia se manifesta apenas quando a primeira estratégia não obteve sucesso.

5.4. Critérios de escolha dos alunos para a estratégia mais adequada.

Durante a implementação do estudo os alunos apresentaram algumas justificações para a escolha da primeira estratégia implementada, antes de abordar outras estratégias. No entanto, essa escolha pode ser diferente quando têm conhecimento de várias estratégias, permitindo uma melhor análise durante a escolha. Neste sentido, perante um conjunto de estratégias possíveis para a tarefa, os alunos foram questionados sobre a escolha da estratégia que consideraram mais eficiente para a tarefa em causa. Verificou-se que a escolha entre duas ou mais estratégias possíveis coincidia muitas vezes com as justificações dadas pelos alunos para a escolha da primeira estratégia, verificando-se neste caso que os alunos nem sempre escolhem a estratégia mais eficiente para uma determinada tarefa, tal como sucedeu no estudo de Star e Newton (2009).

As escolhas dos alunos assentam essencialmente na eficiência da tarefa, embora nem sempre efetuassem uma comparação mais aprofundada entre a estratégia escolhida e outras estratégias. Para José a eficiência da tarefa está relacionada com a facilidade da sua execução, ou seja, o que considera mais fácil, independente de esta ser ou não a sua primeira estratégia e tenha dificuldades na sua execução. O aluno considera que ser "fácil" significa, "mais rápido", "menos cálculo", "menos complicado", "menos conteúdo e "mais direta". Para Maciejewski e Star (2019), considerar que a estratégia mais apropriada é a eficiente, onde a eficiência é determinada pelo número de passos e o tempo de duração é uma perspetiva muito comum nos alunos.

No caso de Maria, aleada à escolha da estratégia mais apropriada está a facilidade na sua execução, mas sempre dependente do que consegue fazer, o que considera mais seguro e o que entende melhor. Para a aluna, o mais importante não é o que envolve menos cálculos, menos etapas e menos tempo, mas sim o que sempre fez nas aulas de Matemática porque é mais confiável, mesmo que tenha dificuldades na sua execução. Para Luís, a facilidade da estratégia está associada ao que consegue lembrar, considera mais fácil decorar e o que aprendeu nas aulas. A escolha dos alunos é identificada por Verschaffel *et al.* (2009) como aquela que pode ser usada com maior confiança, a menos que a estratégia segura resulte em erro ou aquela que é mais valorizada pela comunidade na qual o aluno está inserido. Atendendo às dificuldades de Maria e de Luís em Matemática e o estudo de Maciejewski e Star (2019) a estratégia mais adequada para eles pode ser aquela que é mais compreensível. Também Newton *et al.* (2010) referiram que a escolha da estratégia mais apropriada pode resumir-se à estratégia que o aluno implementou porque considera que entende melhor.

5.5. Considerações finais

Ser capaz de resolver problemas de forma flexível é uma das características fundamentais da flexibilidade procedimental (NRC, 2001). Os resultados do estudo sugerem alguma falta de capacidade dos alunos no que se refere à aplicação de procedimentos de forma precisa e flexível, tendo em conta as várias dificuldades que manifestaram na exploração de diversos processos de resolução. Constatou-se que, embora José mostre maior desenvoltura na utilização de estratégias alternativas na resolução de tarefas, conseguindo, em geral, desempenhos satisfatórios, Maria e Luís demonstraram reduzida capacidade de exploração das estratégias alternativas.

Os resultados também sugerem, em primeiro lugar, que o conhecimento de estratégias únicas parece inibir a flexibilidade dos alunos. Em segundo lugar, o fraco conhecimento dos conteúdos ou dos pré-requisitos e a falta de capacidade no estabelecimento de conexões entre vários conteúdos, contribuíram de forma negativa para o desenvolvimento da flexibilidade procedimental dos alunos. No entanto, Newton *et al.* (2010), referem que a falta de capacidades e pré-requisitos não faz da flexibilidade um objetivo inatingível. Pelo contrário, os alunos com fraco desempenho podem ser capazes de estabelecer contactos com múltiplas estratégias. Mas os resultados deste estudo não são consistentes com os estudos destes autores, uma vez que Maria e Luís têm dificuldades a Matemática, no entanto, revelaram dificuldades no uso de múltiplas estratégias.

Este estudo confirma os resultados alcançados por Blöte *et al.* (2001), Star e Rittle-Johnson (2008) e Newton *et al.* (2010), destacando que, embora os alunos possam ter adquirido um conhecimento de métodos alternativos, tal não implica necessariamente que poderão usá-los. Por exemplo, no estudo atual, Maria justifica a procura pela amplitude do arco correspondente quando pretende determinar a amplitude de um ângulo inscrito como algo que estava habituada a fazer. Mesmo tendo tido contacto com outras estratégias nas tarefas anteriores e reconhecendo que o seu método não era o mais eficiente, continuou a usar a mesma estratégia. Relativamente à escolha de estratégias, comprovou-se que familiaridade, compreensibilidade, confiabilidade e eficiência foram as justificações dos alunos para a escolha de estratégias mais adequadas para uma determinada tarefa.

Este estudo ressalta ainda a importância que a flexibilidade procedimental desempenha no desenvolvimento do conhecimento conceptual e procedimental dos alunos em Matemática, além de permitir que os professores identifiquem uma série de equívocos que poderiam impedir a aprendizagem dos alunos e melhorarem a sua prática pedagógica. Embora Maria e Luís revelassem dificuldades derivadas da aprendizagem mecânica a que estão habituados, José apresentou melhoras significativas nessa abordagem.

Para Newton *et al.* (2010), os professores precisam incutir nos alunos a resolução de tarefas de várias formas e evitar o receio dessa abordagem com alunos que tenham dificuldades, por preocupação de que a falta de capacidades e pré-requisitos não permite atingir a flexibilidade. Woodward e Montague (2002) consideram que os professores também expressam preocupação com a alta carga cognitiva inerente, ao sujeitar alunos a explorar várias estratégias em simultâneo. Se os alunos se baseiam nos procedimentos familiares a partir de um tipo limitado de exercícios padrão suscetível de conduzi-los numa direção errada quando abordam tarefas que não são completamente familiares, então não podemos realmente afirmar que o nosso ensino foi bem-sucedido.

O aparecimento do termo flexibilidade procedimental na resolução de tarefas ainda é recente, pelo que dificultou um maior aprofundamento do estudo, o que justifica que seja necessário desenvolver mais trabalho nessa área. Deste modo, pretende-se com este estudo dar algum contributo à comunidade científica, em particular para a melhoria do ensino da Matemática. Por outro lado, o número de participantes do estudo, que é reduzido, dificulta a inferência para outras populações, relativamente à temática em estudo.

Quanto às futuras investigações, parece-me importante um estudo da flexibilidade noutros campos de geometria ou nas outras áreas da Matemática. Seria pertinente estudar as relações existentes entre os vários critérios que os alunos adotam para a escolha de melhores estratégias. Por exemplo, os alunos revelaram preferências por estratégias fáceis, mas muitas vezes sem efetuar uma análise comparativa aprofundada entre a estratégia escolhida e outras estratégias. Seria interessante dar respostas às seguintes questões:

- Compreender se as estratégias acessíveis são as que proporcionam uma redução de etapas ou cálculos efetuados pelos alunos.
- Perceber se a estratégia acessível depende da facilidade de um aluno em abordar certos conteúdos.
- Analisar se a preocupação dos alunos com a precisão está relacionada com a eficiência da tarefa.

“A educação é a arma mais poderosa que você pode usar para mudar o mundo”.

“Tudo parece impossível até ser feito”.

Nelson Mandela

6. Referências bibliográficas

Aires, L. (2011). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional*. Lisboa: Universidade Aberta.

Aliseda, A. (2003). Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: a structural approach. *Synthese*, 134, 25-44.

Amendoeira, J. (1999). *A formação em enfermagem. Que conhecimentos? Que contextos?. Um estudo etnosociológico*. Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Ciências Sociais e Humanas. Universidade Nova. Monografia (Não publicado).

Anderson J. R. (1982). Acquisition of cognitive skill. *Psychological Review*. 89 (4), 369-406.

Aranha, Á. (2004). *Organização, planeamento e avaliação em educação física*. Vila Real: UTAD.

Banas, J. A., Dunbar, N., Rodriguez, D., & Liu, S. J. (2011). A review of humor in educational settings Four decades of research. *Communication Education*, 60(1), 115-144.

Bardin, L. (1997). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Baroody, A. J. & Dowker, A. (2003). *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking In F Lester (Ed), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-909). NCTM: Reston, VA.

Blöte, A. W., Van der Burg, E. & Klein, A. S. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology*, 93, 627-638.

Booth, J. L., Lange, K. E., Koedinger, K. R. & Newton, K. J. (2013). Using example problems to improve student learning in algebra: Differentiating between correct and incorrect examples. *Learning and Instruction*, *25*, 24–34.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Carpenter, T. P. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp.113–132). Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Cellard, A. (2008). A análise documental. In Poupart, J., Deslauriers, Jean-P., Groulx, Lionel-H., Laperrière, A., Mayer, R., & Pires, Á. P. *A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos* (pp 295-316). Petrópolis: Vozes.

Chetty, S. (1996). The case study method for research in small-and médium - sized firms. *International small business journal*, 15(1), 73-85.

Correia, M. C. B. (2009). A observação participante enquanto técnica de investigação. *Revista Pensar Enfermagem*, 13(2), 30 – 36.

Eisenhardt, K. M. (1989). Building theories from case study research. *Academy of Management Review*, 14 (4), 532-550.

Elia I., Van den Heuvel-Panhuizen., & M., Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics ZDM-*International Journal on Mathematics Education*, 41, 605-618.

Garderen, D. V. (2006). Spatial visualization, visual imaginary and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of Learning Disabilities*, 39(6), 496– 506.

Geary, D. C. (2004). Mathematical and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37(1), 4-15.

Godoy, A. S. (1995). Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. *Revista de Administração de Empresas*, 5(3), 20-29.

Goetz, J., & Lecompte, M. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. San Diego, CA: Academic Press.

Greeno, J. G. (1978). Understanding and procedural knowledge in mathematics instruction. *Educational Psychologist*, 12(3), 262-283.

Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM standards. In J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 5–23). NCTM: Reston, VA.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge in Mathematics: An introductory analysis* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Simon & Schuster Macmillan.

Haapasalo, L., & Kadijevich, Dj. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *Journal f ̈ur Mathematik-Didaktik*, 21 (2), 139–157.

Igea, D., Agustín, J., Beltrán, A., & Martín, A. (1995). *Técnicas de investigación en ciencias sociales*. Madrid: Dykinson.

Jonsson, B. Norqvist, M. Liljekvist, Y., & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 36, 20-32.

Jonsson, B. Kulaksiz, Y. C., & Lithner, J. (2016) Creative and algorithmic mathematical reasoning: effects of transfer-appropriate processing and effortful struggle, International *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47 (8), 1206-1225.

Kadijevich, D. M. (2018). Relating procedural and conceptual knowledge. *The teaching of Mathematics*, 21(1), 15–28.

Kothari, C. R. (2004). *Research Methodology. Methods and Techniques*. New Age International (P) Ltd., Publishers. Nova Deli.

Kripka, R. M. L., Scheller, M., & Bonotto D. L. (2015). Pesquisa Documental: considerações sobre conceitos e características na pesquisa qualitativa. In *Atas do Congresso Ibero-Americano em Investigação Qualitativa*, 2, 243-247.

Kwon, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review*, 7, 51-61.

Lange, K. E., Booth, J. L., & Newton, K. J. (2014). Learning algebra from worked examples. *Mathematics Teacher*, *107*(7), 535–540.

Latorre, A. (2003). La investigación-acción. *Conocer y cambiar la práctica educativa*. Barcelona: Editorial Graó.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1994). *Investigação Qualitativa*: *Fundamentos e Práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Levav-Waynberg, A., & Leikin R. (2009). Multiple solutions to a problem: A tool for assessment of mathematical thinking in geometry. *The sixth conference of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Lewis, C. (1988). Why and how to learn why: Analysis-based generalization of procedures. *Cognitive Science*, 12, 211-256.

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning and familiar procedures. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31, 83–95.

Lithner, J. (2003). Students mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 29–55.

Lithner, J. (2006). A framework for analysing creative and imitative mathematical reasoning. *Research Reports in Mathematics Education* (In Press), Department of Mathematics, Umea University. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.466.7119&rep=rep1&type=pdf. Acedido em 17/06/2019.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 255–276.

Lüdke, M. & André, M. E. D. (1986). A pesquisa em educação: abordagens qualitativas, São Paulo: EPU.

Maciejewski, W., & Star, J. R. (2019). Justifications for choices made in procedures. *Educational Studies in Mathematics*, 101(3), 325–340.

ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education*: A qualitative approach. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. NCTM: Reston, VA.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM: Reston, VA.

National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Principles to actions*: *Ensuring mathematical success for all*. NCTM: Reston, VA.

National Council of Teachers of Mathematics (2008). *Princípios e normas para a Matemática escolar* (2.ª ed) Lisboa: Associação de Professores de Matemática (Obra original em inglês publicada em 2000).

National Research Council (2001). Adding it up: *Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Neves, E. F. (2007). *Episódios da história da matemática para o ensino*. Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Newton, K., Star, J., & Lynch, K. (2010). Understanding the development of flexibility in struggling algebra students. *Mathematical Thinking & Learning*, 12, 282–305.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. *Educação e Matemática*, 100, 3-9.

Pesek, D. D., & Kirschner, D. (2000). Interference of instrumental instruction in subsequent relational learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 524–540.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery on understanding learning and teaching problem solving*. NewYork: John Wiley and sons.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação Matemática. *Quadrante*, 3(1), 3-18.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Guimarães, F., Breda, A., Sousa, H., Oliveira, P., & Martins, G. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa*, 7(2), 355-377.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Pereira, J. M. (2015). É mesmo necessário fazer planos de aula? *Educação e Matemática, 133*, 26-35.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346-362.

Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology*, 99, 561–574.

Rittle-Johnson, B., Star, J. R., & Durkin, K. (2009). The importance of familiarity when comparing examples: Impact on conceptual and procedural knowledge of equation solving. *Journal of Educational Psychology*, 101(4), 836–852.

Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge in mathematics. In R. Cohen Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford handbook of numerical cognition* (pp. 1102-1118). UK: Oxford University Press.

Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a one-way street: bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review*, 27, 587–597.

Rodrigues, M., Bernardo, M. (2011). Ensino e aprendizagem da geometria. In *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. APM (p.339-344).

Russel, S. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In Stiff, L. V., Cur-Cio, F. R. (Eds.). *Developing mathematical reasoning in grades K-12.* Reston: NCTM (pp. 1-12).

Sá-Silva, J. R., Almeida, C. D., & Guindani, J. F. (2009). Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas. *Revista Brasileira de História & Ciências Sociais*, 1(1), 1-15.

Schoenfeld, A. H. (1983). Problem solving in the mathematics curriculum: *A report recommendations, and an annotated bibliography*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Sidenvall, J., Lithner, J., & Jäder, J. (2015). Students' reasoning in mathematics textbook task-solving. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 46, 533–552.

Spradley, James P. (1980). *Participant Observation*. Orlando, FL: Harcourt Brace Jovanovich College Publishers

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Star, J. R. (2002). Re-conceptualizing procedural knowledge: The emergence of "intelligent" performances among equation solvers. In *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 999-1007). Columbus, OH: Eric Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 404–411.

Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction*, 18, 565–579.

Star, J. R.., & Newton, K. J. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. ZDM-*International Journal on Mathematics Education*, 41(5), 557-567.

Stigler, J., & Hiebert, J. (1999). The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. New York: The Free Press.

Sweller, J., Merrienboer, J., & Paas, F. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, 10(3), 251–296.

Tambychik, T. & Meerah, T. S. M. (2010). Students' Difficulties in Mathematics Problem-Solving: What do they Say?. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 8, 142–151.

Taylor, S., & Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona: Paidós.

Tuckman, B. W. (2002). *Manual de Investigação em Educação*. 2ª edição, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24, 335–359.

Vilanova, S., Rocerau, M., Valdez G., Oliver, M., Vecino, S., Medina, P., Astiz, M., & Alvarez, E. (2011). La educación Matemática: El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación*, 4(1), 45-68.

Wirebring, L. K., Lithner, J., Jonsson, B., Liljekvist, Y., Norqvist, M., & Nyberg, L. (2015). Learning mathematics without a suggested solution method: Durable effects on performance and brain activity. *Trends in Neuroscience and Education*, 4, 6–14.

Woodward, J., & Montague, M. (2002). Meeting the challenge of mathematics reform for students with LD. *The Journal of Special Education*, 36(2), 89–101.

Yin, R. (1984). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park, CA: Sage.

Zainal, Z. (2007). Case study as a research method. *Jurnal Kemanusiaan*. 5(1), 1-6.